

О влиянии силы Кориолиса на АКЭ эффект

П.Б. Руткевич, Г.С. Голицын, П.П. Руткевич, А.В. Тур

Рассматривается альфа эффект в турбулентной несжимаемой жидкости в трёхмерном пространстве с учётом силы Кориолиса. Турбулентность возбуждается мелкомасштабной неспиральной внешней силой, не сохраняющей чётность.

1. U. Frisch, Z. S. She and P. L. Sulem, "Large-Scale Flow Driven by the Anisotropic Kinetic Alpha Effect," *Physica D*, Vol. 28, No. 3, 1987, pp. 382-392.

АКА эффект

В работе [1] приводится пример крупномасштабной неустойчивости в несжимаемой жидкости, так называемый, АКА эффект (Анизотропный Кинетический Альфа эффект). В этой работе крупномасштабная неустойчивость появляется под действием мелкомасштабной неспиральной внешней силы, поле которой нарушает чётность. Эта работа отличается тем, что внешняя сила не является случайной. Это позволило авторам применить необычный для теории турбулентности математический аппарат. Используемый нелинейный метод позволил выделить порядки разложения по малому параметру и получить крупномасштабные уравнения из соответствующих секулярных соотношений, которые появляются во многих порядках разложения. Этот метод применялся также и в других работах.

Внешняя сила

Рассматриваем АКА эффект в несжимаемой жидкости под действием внешней силы, не сохраняющей чётность [1], с учётом силы Кориолиса. Выбор внешней силы в таких задачах является очень важным, поскольку внешняя сила моделирует мелкомасштабную турбулентность. Вслед за работой [1] считаем, поле внешней силы \mathbf{F} не спиральным, т.е. $\langle \mathbf{F} \text{rot} \mathbf{F} \rangle = 0$, но внешняя сила не сохраняет чётность. Считаем также, что среднее по периоду внешней силы равно нулю $\langle \mathbf{F} \rangle = 0$, и что она имеет только вихревые компоненты $\langle \text{div} \mathbf{F} \rangle = 0$.

$$F_1 = \frac{\nu V_0 \sqrt{2}}{l_0^2} \cos\left(\frac{y}{l_0} + \frac{\nu t}{l_0^2}\right), \quad F_2 = \frac{\nu V_0 \sqrt{2}}{l_0^2} \cos\left(\frac{x}{l_0} - \frac{\nu t}{l_0^2}\right),$$

$$F_3 = F_1 + F_2.$$

Обозначения

Мы обозначили l_0 и t_0 характерный размер и характерное время основного течения и V_0 характерную скорость основного течения.

Уравнения Навье - Стокса

Исходим из уравнений Навье - Стокса для несжимаемой жидкости с учётом силы Кориолиса.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{u} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} + 2\vec{\Omega} \times \vec{u} + \nabla p = \vec{F},$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0.$$

Неустойчивость этой нелинейной задачи будем искать методом разложения по числу Рейнольдса R , которое будем считать малым параметром.

$$R = l_0 V_0 / \nu$$

Основное состояние

Находим основное состояние системы, то есть течение, обусловленное внешней силой.

Решаем систему в нулевом порядке

$$\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial x^2} = F_i.$$

Получаем

$$u_1^0 = V_0 \cos\left(\frac{y}{l_0} + \frac{\nu t}{l_0^2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad u_2^0 = V_0 \cos\left(\frac{x}{l_0} - \frac{\nu t}{l_0^2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$u_3^0 = u_1^0 + u_2^0.$$

Уравнения в терминах Фриша

Параметр Кориолиса также считаем малым

$$\Omega \rightarrow R^4 \Omega_1.$$

Безразмерный вид уравнений Навье–Стокса

$$\partial_t u_i - \Delta u_i + R \partial_j (u_j u_i) + \varepsilon_{ijk} 2\Omega_j W_k + R \partial_i p = F_i,$$

$$\partial_j u_j = 0.$$

Эта система содержит нетривиальный линейный оператор. Нелинейные движения оказываются неустойчивыми за счёт АКА эффекта. У Фриша в работе [1], была просто АКА неустойчивость. В рассматриваемой системе можно искать неустойчивые решения отличные от тех, что были у Фриша. Эта система уравнений обобщает систему Фриша.

Разложения

Разложение скорости и давления по малому параметру $R \ll 1$.

$$\vec{V} = \vec{u}^{(0)} + R \cdot \vec{u}^{(1)} + R^2 \cdot \vec{u}^{(2)} + \dots$$

$$p = p^{(0)} + R \cdot p^{(1)} + R^2 \cdot p^{(2)} + \dots$$

Разложение дифференциальных операторов по малому параметру R

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i + R^2 \frac{\partial}{\partial X^i} \cdot \quad \frac{\partial}{\partial t} = \partial_t + R^4 \frac{\partial}{\partial T} \cdot$$

Крупномасштабные переменные

Крупномасштабная неустойчивость, которую мы ищем, имеет масштаб

$$X = R^{-2} x, \quad T = R^{-4} t.$$

Соответствующие частные производные обозначаем как

$$\frac{\partial}{\partial X^i} = \nabla_i, \quad \frac{\partial}{\partial T} = \partial_T.$$

Все поля выражаются в терминах быстрых t, x и медленных T, X переменных. Таким образом, в уравнениях Навье - Стокса мы делаем замену

$$\partial_t \rightarrow \partial_t + R^4 \partial_T, \quad \partial_i \rightarrow \partial_i + R^2 \nabla_i.$$

Уравнения с разложенными операторами

$$\begin{aligned} & \left(\partial_t + R^4 \partial_T \right) u_i - \left(\partial_i + R^2 \nabla_i \right)^2 u_i + R \left(\partial_j + R^2 \nabla_j \right) \left(u_j u_i \right) + \\ & + \varepsilon_{ijk} 2\Omega_j u_k + R \left(\partial_i + R^2 \nabla_i \right) p = F_i \end{aligned}$$

$$\left(\partial_j + R^2 \nabla_j \right) u_j = 0.$$

Порядки в уравнении Навье-Стокса

$$\begin{aligned} & (R^0): \\ \partial_t u_i^{(0)} - \partial^2 u_i^{(0)} &= F_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (R^1): \\ \partial_t u_i^{(1)} - \partial^2 u_i^{(1)} + \partial_j (u_j^{(0)} u_i^{(0)}) + \partial^2 p^{(0)} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (R^2): \\ \partial_t u_i^{(2)} - \partial^2 u_i^{(2)} + \partial_j (u_i^{(0)} u_j^{(1)} + u_i^{(1)} u_j^{(0)}) + \partial_i p^{(1)} &= -2\nabla_j \partial_j u_i^{(0)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (R^3): \\ \partial_t u_i^{(3)} - \partial^2 u_i^{(3)} + 3(u_i^{(0)} u_j^{(2)} + u_i^{(2)} u_j^{(0)} + u_i^{(1)} u_j^{(1)}) + \\ + \nabla_j (u_j^{(0)} u_i^{(0)}) + \partial_i p^{(2)} + \nabla_i p^{(0)} &= 2\nabla_j \partial_j u_i^{(1)}, \end{aligned}$$

Порядки в уравнении Навье-Стокса

(R^4) :

$$\begin{aligned} & \partial_T u_i^{(0)} + \partial_t u_i^{(4)} - \partial^2 u_i^{(4)} - 2\nabla_j \partial_j u_i^{(2)} - \nabla^2 u_i^{(0)} + \\ & + \partial_j \left(u_i^{(0)} u_j^{(3)} + u_i^{(3)} u_j^{(0)} + u_i^{(1)} u_j^{(2)} + u_i^{(2)} u_j^{(1)} \right) + \\ & + \nabla_j \left(u_i^{(0)} u_j^{(1)} + u_i^{(1)} u_j^{(0)} \right) + \\ & + \partial_i p^{(3)} + \nabla_i p^{(1)} = 0, \end{aligned}$$

Порядки в уравнении Навье-Стокса (R^5):

$$\begin{aligned} & \partial_T u_i^{(1)} + \partial_t u_i^{(5)} - \partial^2 u_i^{(5)} - 2\nabla_j \partial_j u_i^{(3)} - \nabla^2 u_i^{(1)} + \\ & + \partial_j \left(u_i^{(0)} u_j^{(4)} + u_i^{(4)} u_j^{(0)} + u_i^{(1)} u_j^{(3)} + u_i^{(3)} u_j^{(1)} + u_i^{(2)} u_j^{(2)} \right) + \\ & + \nabla_j \left(u_i^{(0)} u_j^{(2)} + u_i^{(2)} u_j^{(0)} + u_i^{(1)} u_j^{(1)} \right) + \varepsilon_{ijk} 2\Omega_{1j} u_k + \\ & + \partial_i p^{(4)} + \nabla_i p^{(2)} = 0, \end{aligned}$$

Порядки в уравнении непрерывности

$$(R^0): \quad \partial_i u_i^{(0)} = 0,$$

$$(R^1): \quad \partial_i u_i^{(1)} = 0,$$

$$(R^2): \quad \partial_i u_i^{(2)} + \nabla_i u_i^{(0)} = 0,$$

$$(R^3): \quad \partial_i u_i^{(3)} + \nabla_i u_i^{(1)} = 0,$$

$$(R^4): \quad \partial_i u_i^{(4)} + \nabla_i u_i^{(2)} = 0,$$

$$(R^5): \quad \partial_i u_i^{(5)} + \nabla_i u_i^{(3)} = 0,$$

Разложения с крупным масштабом

Разложения скорости и давления по малому параметру $R \ll 1$.

$$\vec{V} = R^{-1} \cdot \vec{W} + \vec{u}^{(0)} + R \cdot \vec{u}^{(1)} + R^2 \cdot \vec{u}^{(2)} + \dots$$

$$p = R^{-2} \cdot p^{(-2)} + R^{-1} \cdot p^{(-1)} + p^{(0)} + \\ + R \cdot p^{(1)} + R^2 \cdot p^{(2)} + \dots$$

$$(R^3): \quad \frac{\partial W_i}{\partial T} + \varepsilon_{ijk} 2\Omega_{1j} W_k = \alpha \nabla_j R_{ij} + \Delta W_i,$$

$$\nabla_i W_i = 0. \quad R_{ij} = \left\langle u_j^{(0)} u_i^{(0)} \right\rangle$$

Система в компонентах на крупном масштабе

$$\frac{\partial W_1}{\partial T} + \Omega_1 W_2 = \alpha \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{1}{2 + 2W_2 + W_2^2} \right) + \frac{\partial^2 W_1}{\partial Z^2},$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial T} - \Omega_1 W_1 = \alpha \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{1}{2 - 2W_1 + W_1^2} \right) + \frac{\partial^2 W_2}{\partial Z^2}.$$

Линейная система:

$$\frac{\partial W_1}{\partial T} + \Omega_1 W_2 = -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial W_2}{\partial Z} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial Z^2},$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial T} - \Omega_1 W_1 = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial W_1}{\partial Z} + \frac{\partial^2 W_2}{\partial Z^2}.$$

Графики Фриша

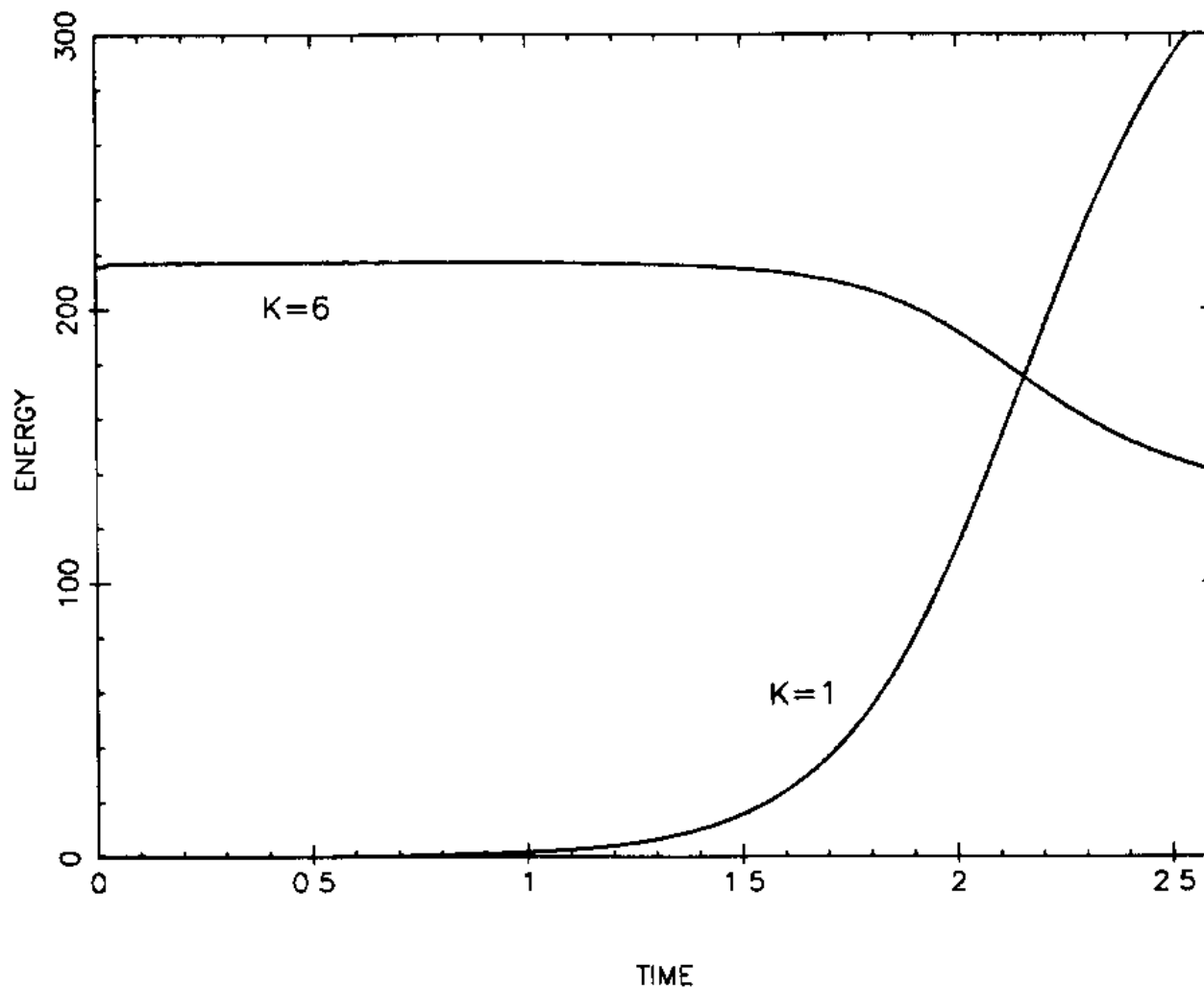


Fig 1 Full numerical simulation of 3-D Navier–Stokes equation showing linear AKA instability and the beginning of saturation. The force is applied at $k = 6$, giving a basic flow of Reynolds number $R = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Only the modes with wavevector $(0, 0, \pm 1)$ are linearly unstable.

Графики Фриша

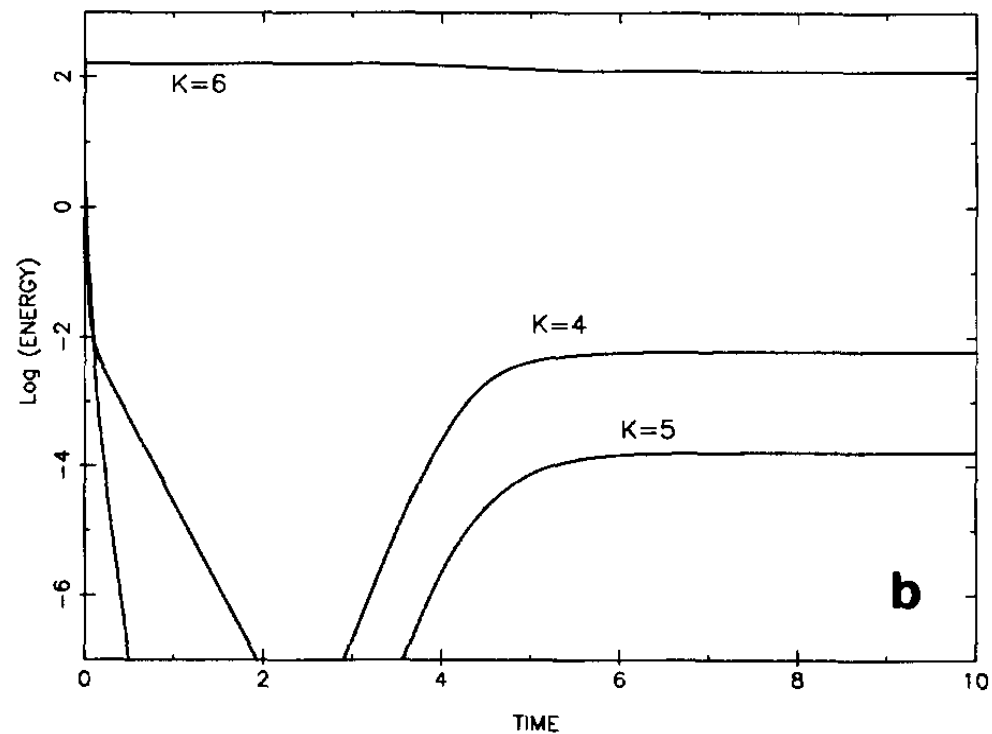
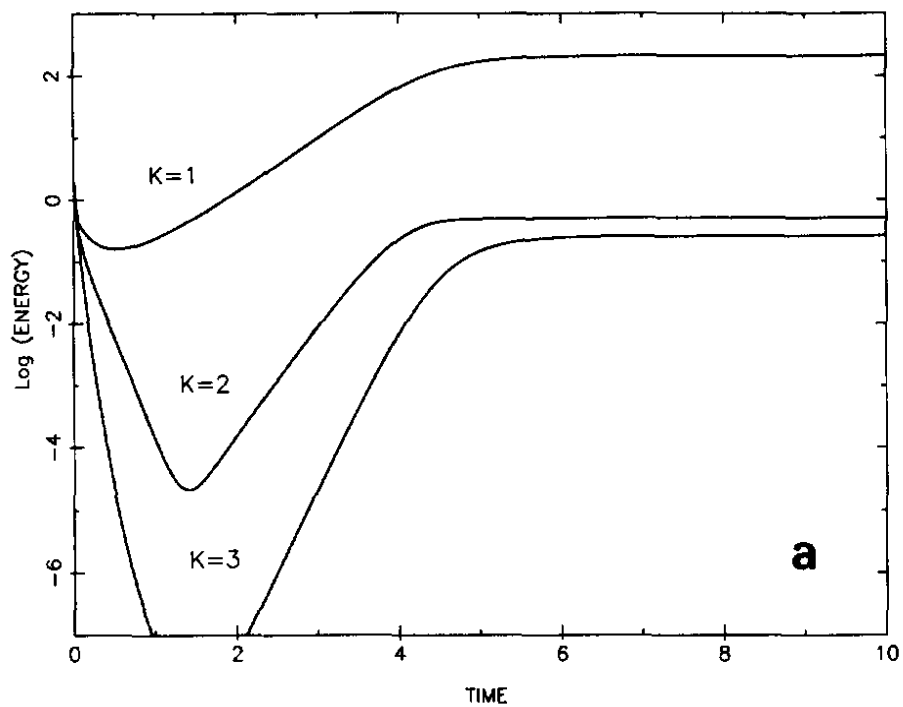
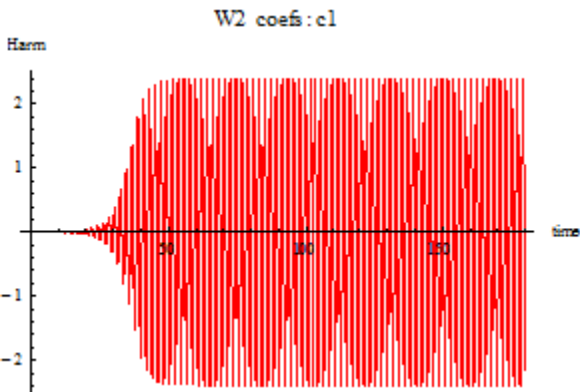
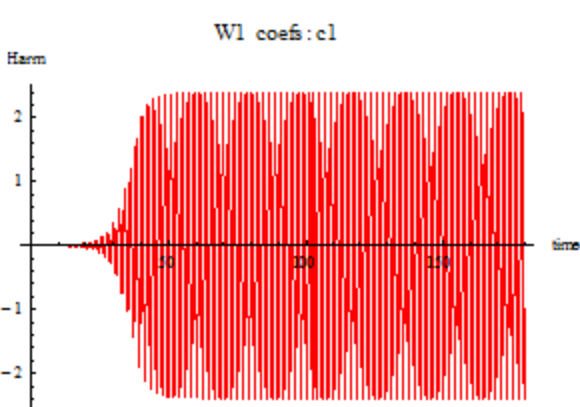


Fig 2 Saturation of AKA instability by the feed-back mechanism (a) Energies in modes $k=1$ to 3, (b) energies in modes $k=4$ to 6. Forcing is at wavenumber 6, Reynolds number of basic flow is $R = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Note the Beltrami runaway phase from $t=1$ to $t=4$, followed by feed-back saturation leading to a slight depletion of the $k=6$ modes

Наши графики

Косинус моды

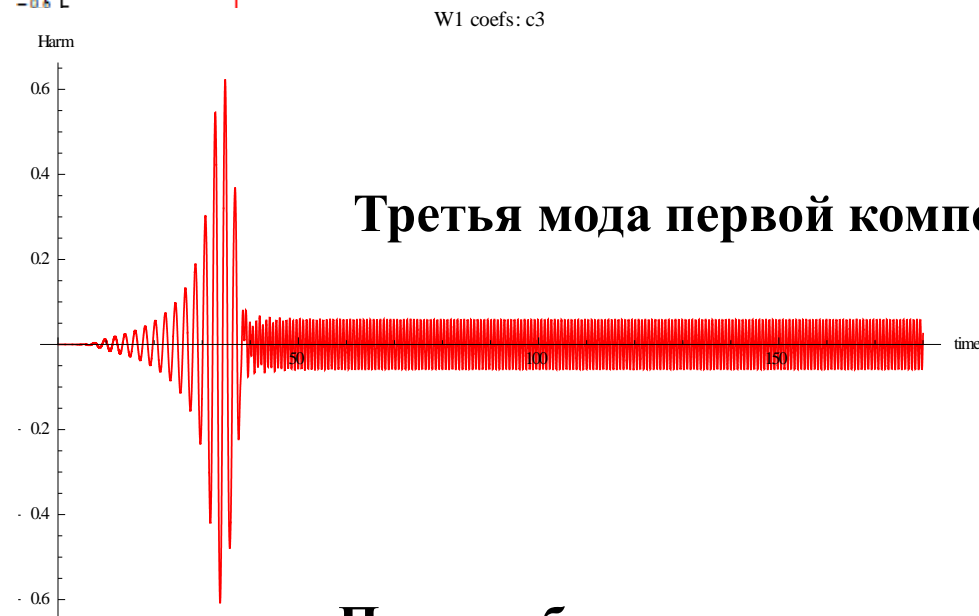
{h → 6, γ → 0.1, l_0 → 0.1, V_0 → 1, Ω → 3, α → 1, R → 1, timeSteps → 60 000, dt → 0.003}



Первая мода первой и второй компонент



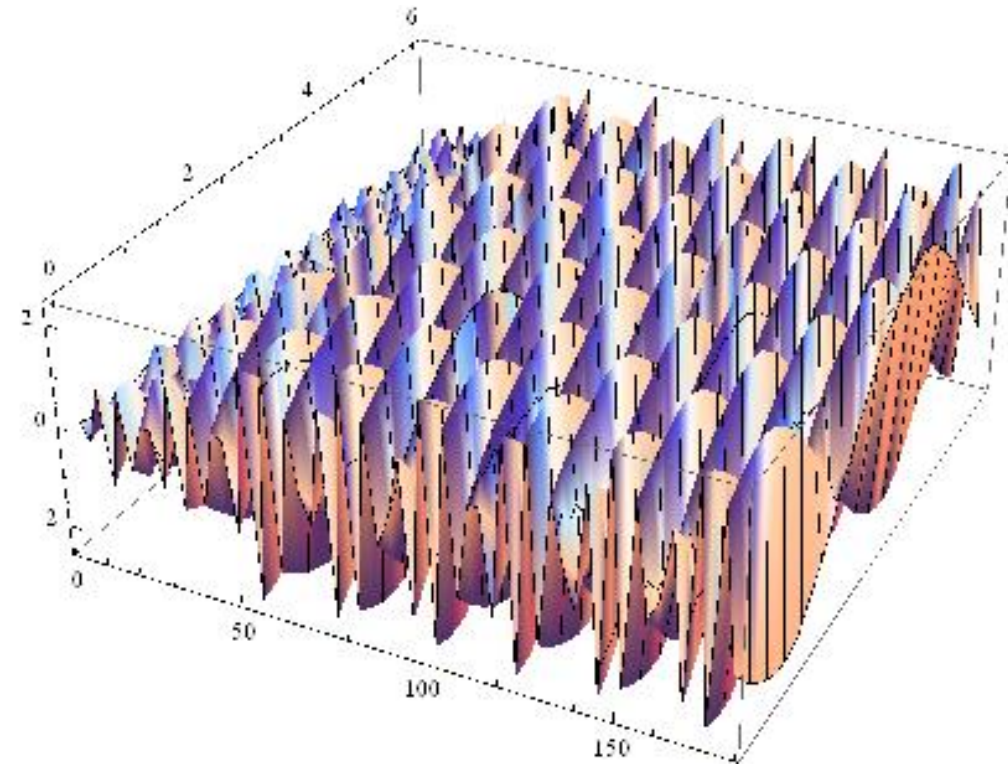
Вторая мода первой компоненты



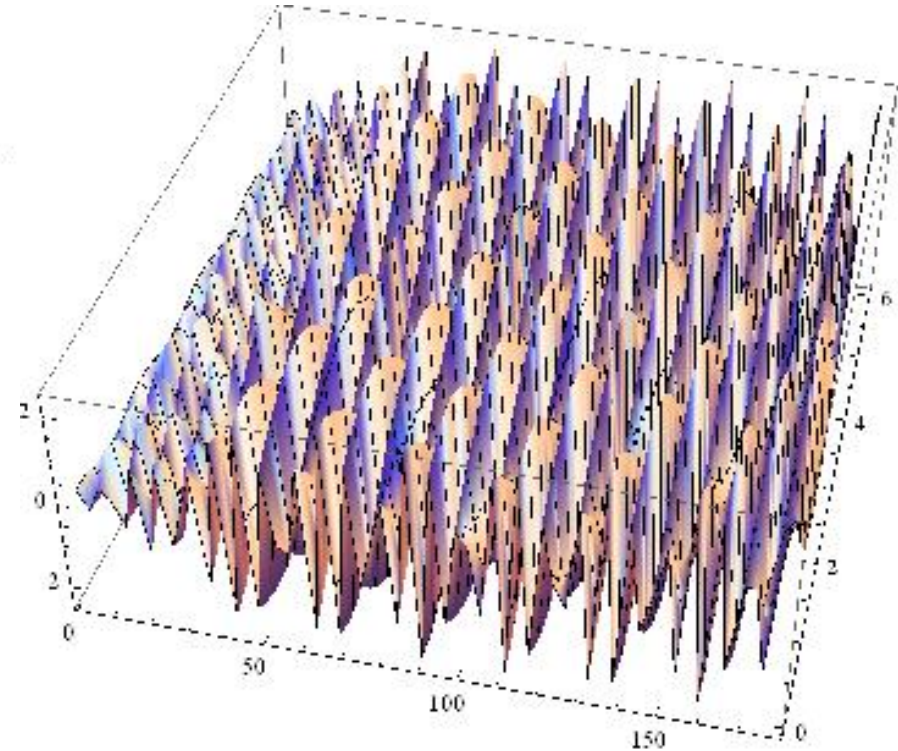
Третья мода первой компоненты

По оси абсцисс отложено время

{h → 6, ν → 0.1, l0 → 0.1, V0 → 1, Ω → 3, α → 1, R → 1, timeSteps → 60 000, dt → 0.003}



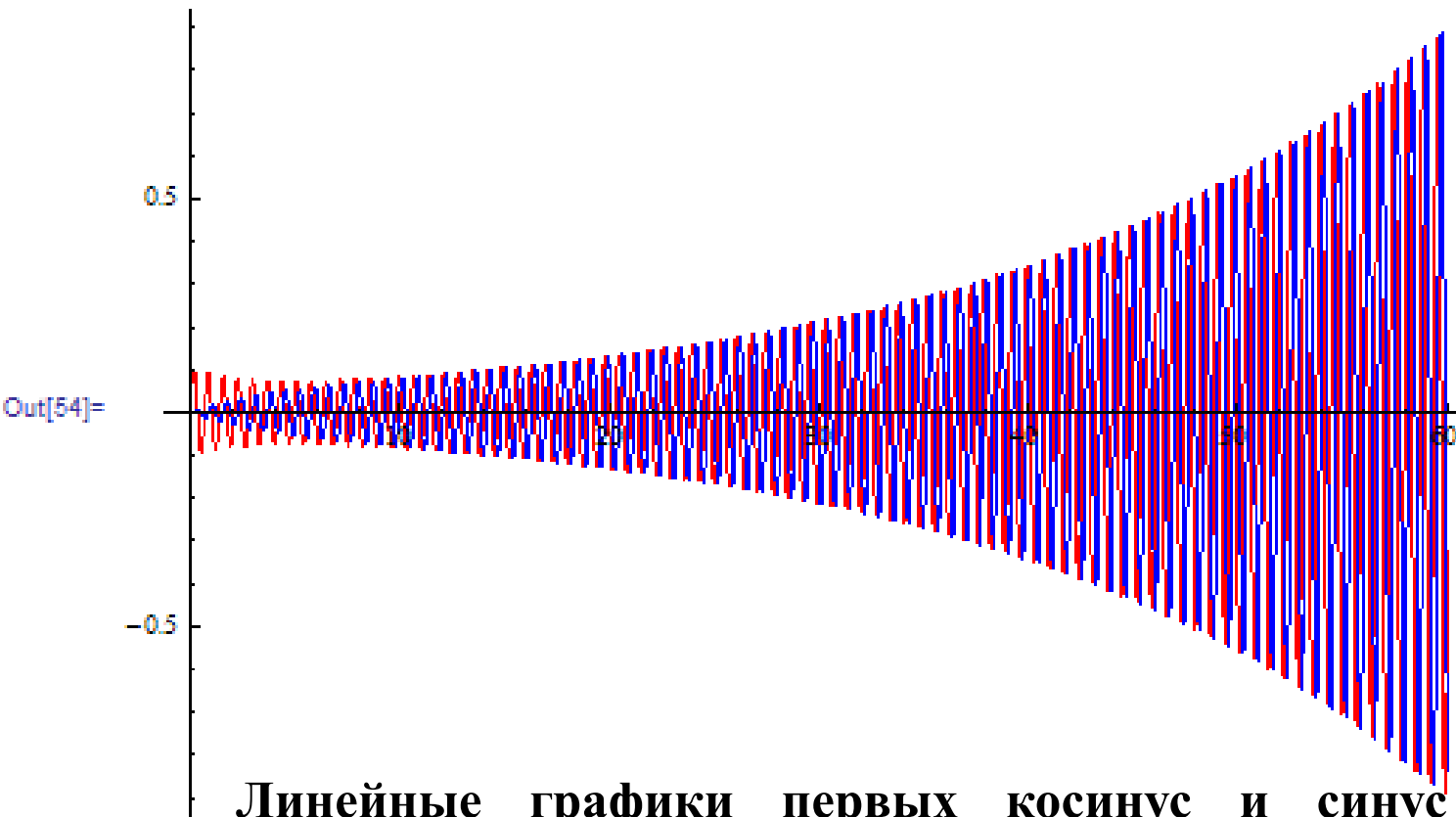
Трёхмерный график первой компоненты. По оси абсцисс отложено время, по оси ординат координата Z , по оси аппликат амплитуда первой компоненты скорости.



Трёхмерный график второй компоненты. По оси абсцисс отложено время, по оси ординат координата Z , по оси аппликат амплитуда второй компоненты скорости.

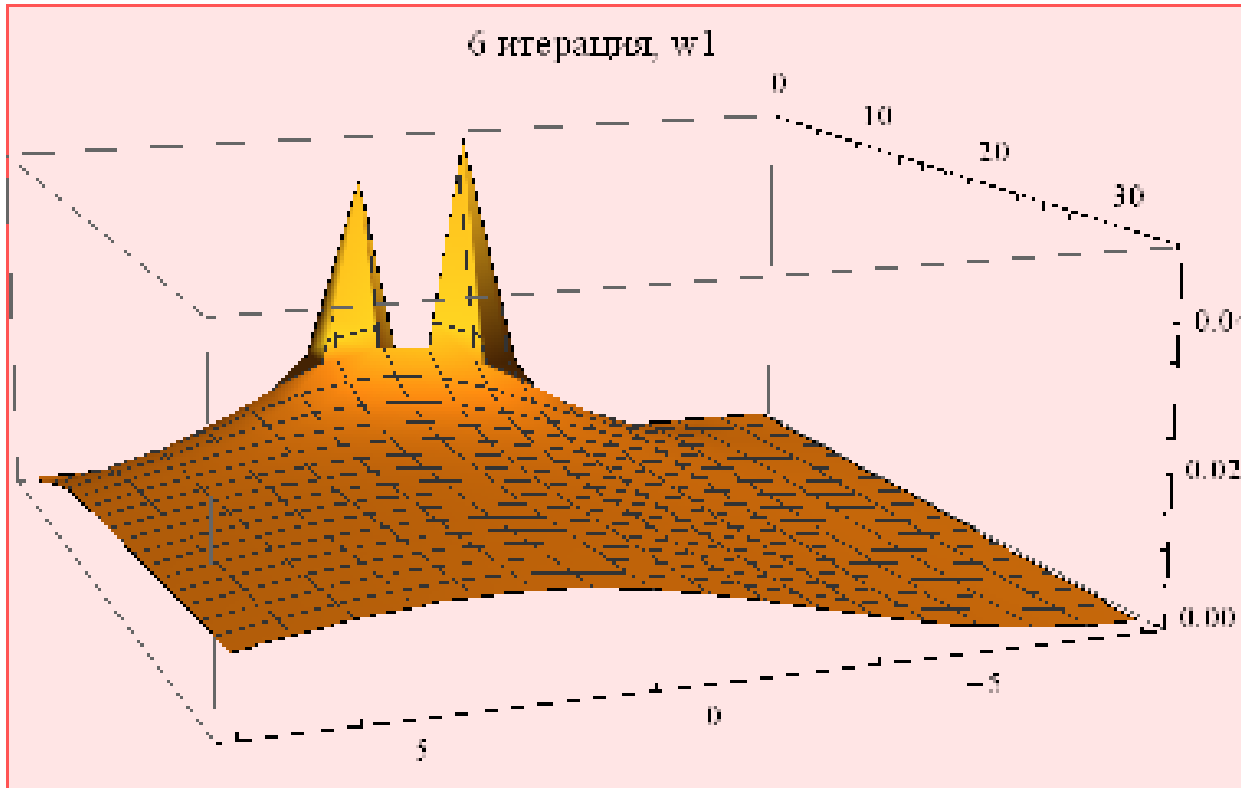
13 ноября 2019

```
In[54]:= Plot[{vc1[t] /. sol, vs1[t] /. sol}, {t, 0, tMax}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Red, Blue}]
```



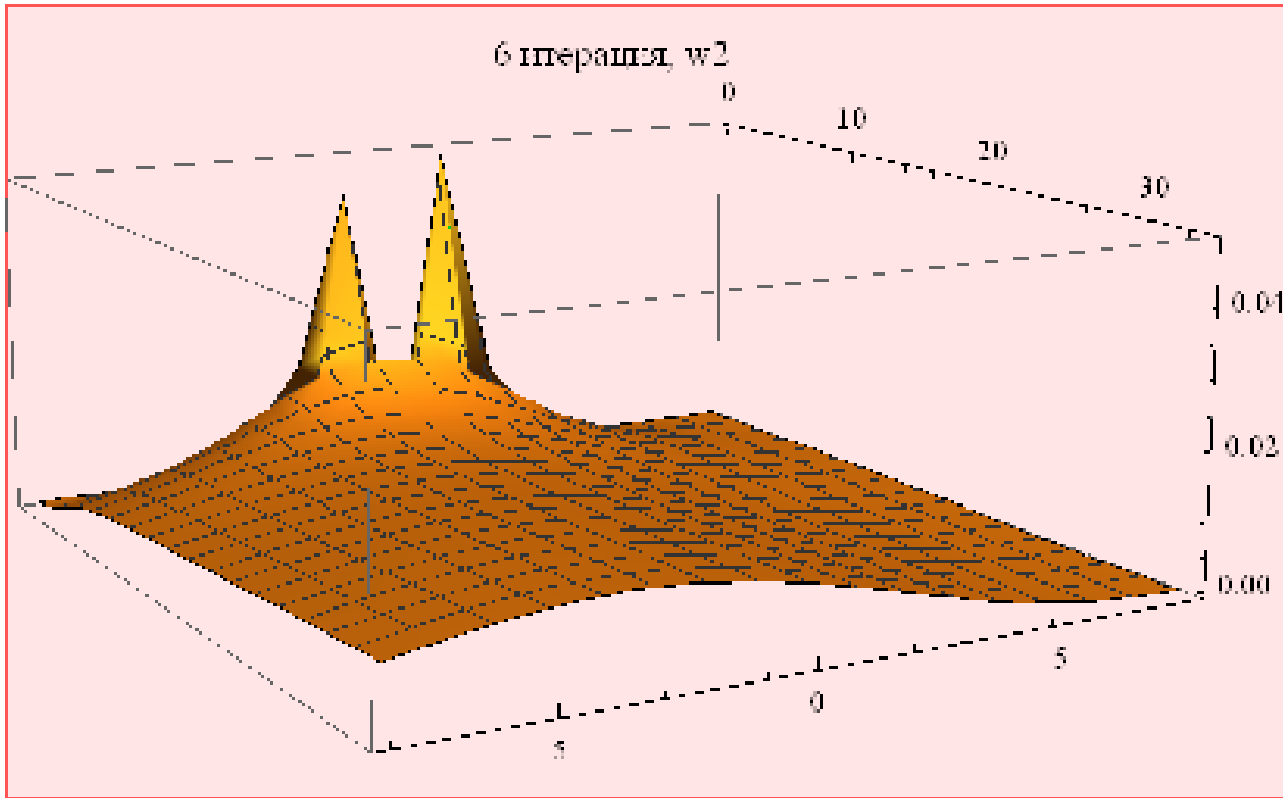
Линейные графики первых косинус и синус мод первой компоненты скорости. По оси абсцисс отложено время, по оси ординат первая косинус и синус моды первой компоненты скорости. Красным цветом показана косинус мода. Заданная начальным условием она вначале немного затухает, а синус мода растёт с нуля. Дальше обе растут синхронно. Решение получено численно разложением в ряд Фурье.

```
In[128]= Plot3D[Interpolation[w1Iter6][z, t],  
  {z, zMin, zMax}, {t, tMin, tMax}, PlotRange -> All,  
  PlotLabel -> "6 итерация, w1"]
```



Трёхмерный график первой компоненты скорости без силы Кориолиса как функция координаты Z и времени. Видно начальное условие «рожки», содержащее большое количество высокочастотных мод. С течением времени развивается только самая младшая мода. Решение получено аналитически с помощью фундаментальных решений.

```
In[129]:= Plot3D[Interpolation[w2Iter6][z, t],  
  {z, zMin, zMax}, {t, tMin, tMax}, PlotRange -> All,  
  PlotLabel -> "6 итерация, w2"]
```

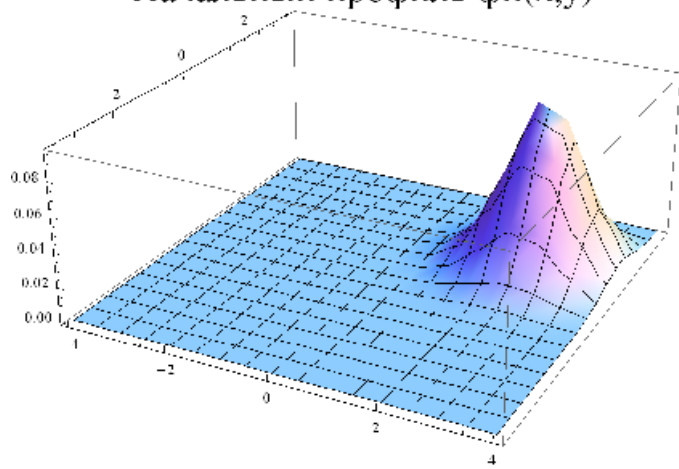


Трёхмерный график второй компоненты скорости без силы Кориолиса как функция координаты Z и времени. Видно начальное условие «рожки», содержащее большое количество высокочастотных мод. С течением времени развивается только самая младшая мода. Решение получено аналитически с помощью фундаментальных решений.

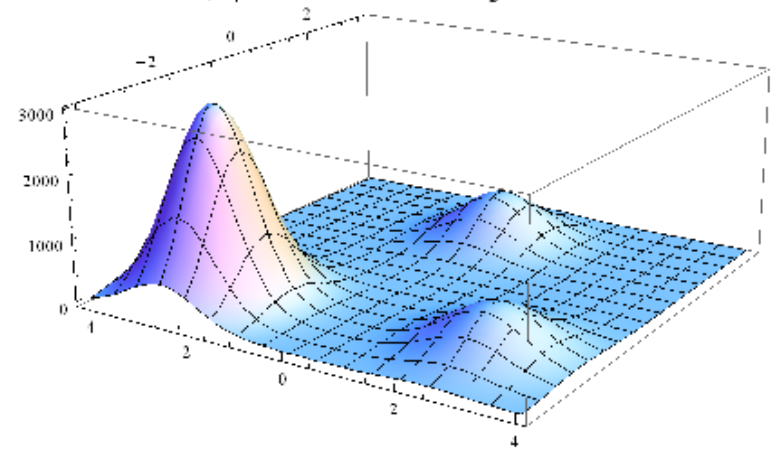
Крупномасштабные структуры в областях выделения тепла в модели спиральной турбулентности

В работе [С.С. Моисеев, П.Б. Руткевич, А.В. Тур, В.В. Яновский, ЖЭТФ 1988, с. 144-153] приводится система уравнений для потенциалов полоидального и тороидального полей скорости систему. Эту систему можно переписать в виде одного уравнения для потенциала полоидального поля. Предполагаем для упрощения вертикальную зависимость полей скорости от координаты z в виде тригонометрической функции $\sin(K_z Z)$, как в задаче для конвекции в горизонтальном плоском слое со свободными граничными условиями на верхней и нижней границах слоя. Используя фундаментальное решение этого уравнения, можно получить аналитически решения для потенциалов полоидального и тороидального полей системы, а также для компонент скоростей как функций координат и времени. В целях визуализации полученных структур приведём только графики тороидальной компоненты поля скорости для разных моментов времени.

Пусть в начальный момент времени в атмосфере существует движение воздуха типа тайфуна. На 3D рисунках оно представлено в виде потенциала полоидальной компоненты скорости, а на 2D рисунках тороидальной компонентой скорости на середине толщины атмосферы как функций горизонтальных координат в правых верхних углах графиков.

Начальный профиль $\phi(x,y)$ 

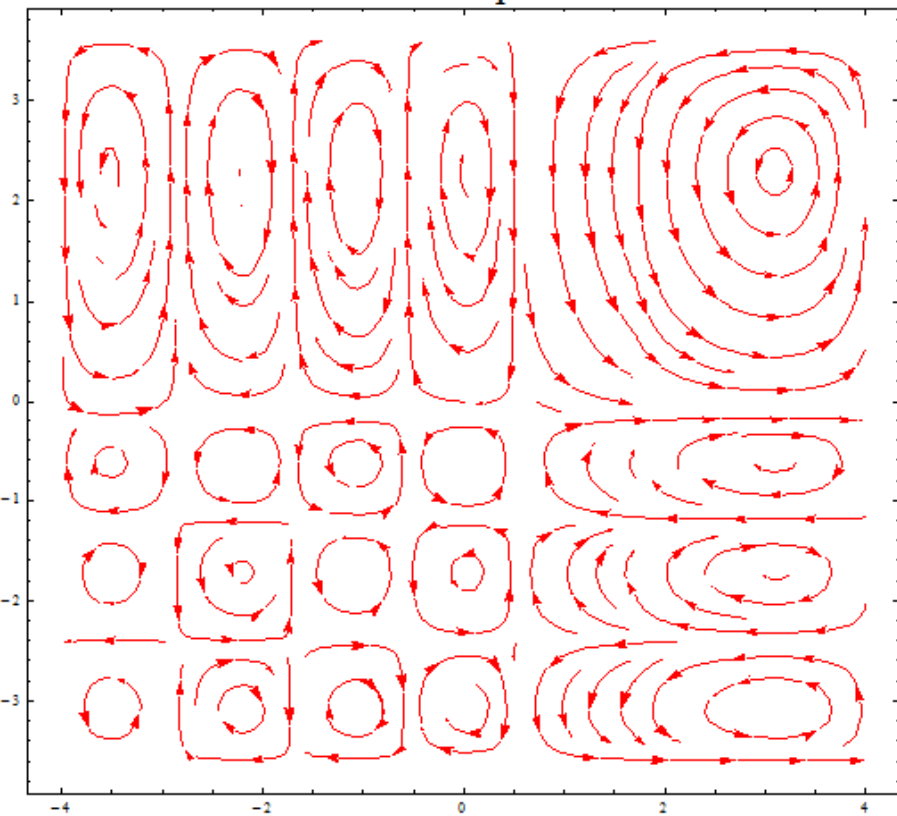
Добавка к числу Рэлея



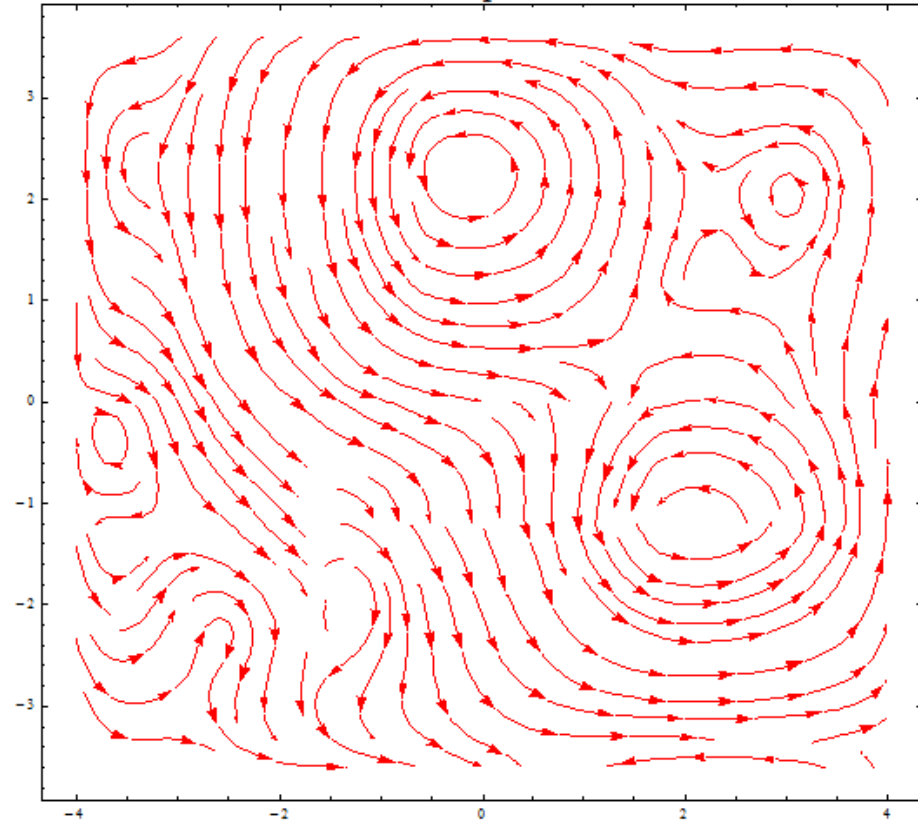
Однако считаем, что это движение воздуха не обусловлено подогревом в атмосфере. Таким образом, это движение в скором времени неизбежно должно затухнуть. И его кинетическая энергия должна распределиться в окружающем пространстве и диссипировать. Считаем это движение начальным условием. Предположим, что на некотором отдалении от начального движения воздуха имеются три локализованные облачные структуры, обусловленные подогревом в атмосфере с соответствующими числами Рэлея и спиральностями.

Пусть на фоне устойчивой стратификации значения чисел Рэлея и спиральности в этих облачных структурах превосходят соответствующие критические значения для обеспечения конвективной спиральной неустойчивости. Если кинетическая энергия начального движения достигнет этих облачных структур, то в силу конвективной спиральной неустойчивости в них начнутся местные движения воздуха. Таким образом, на более поздних графиках мы должны увидеть усиление скорости вокруг облачных структур с достаточно большими значениями локальных чисел Рэлея и параметров спиральности.

Vtor в момент времени 0.01



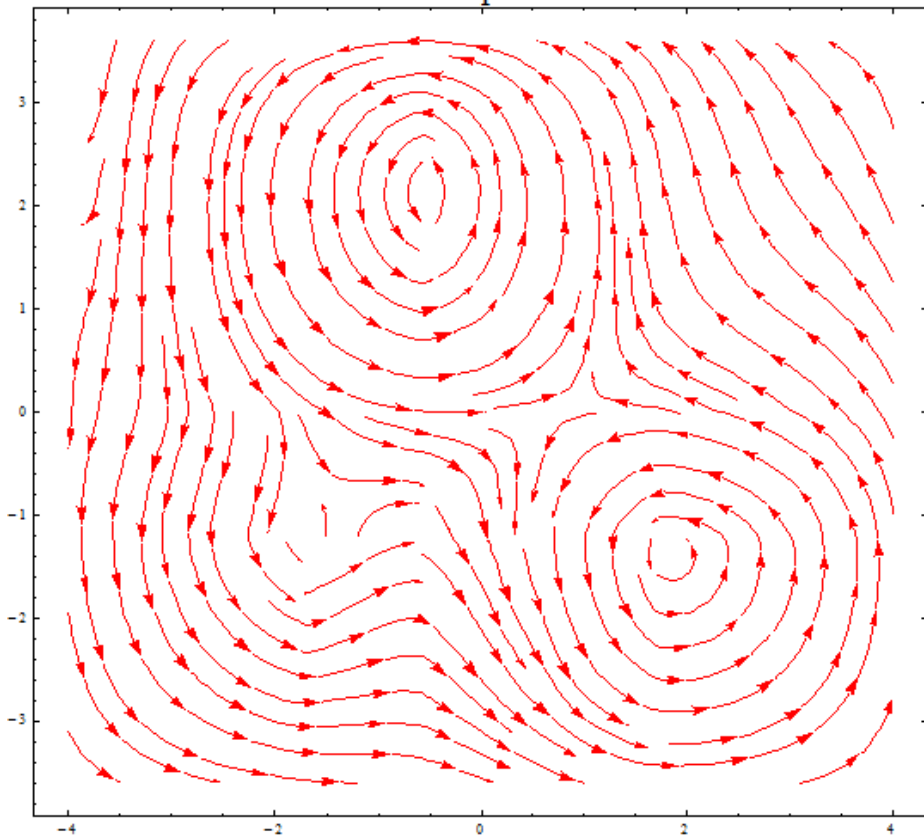
Vtor в момент времени 0.32125



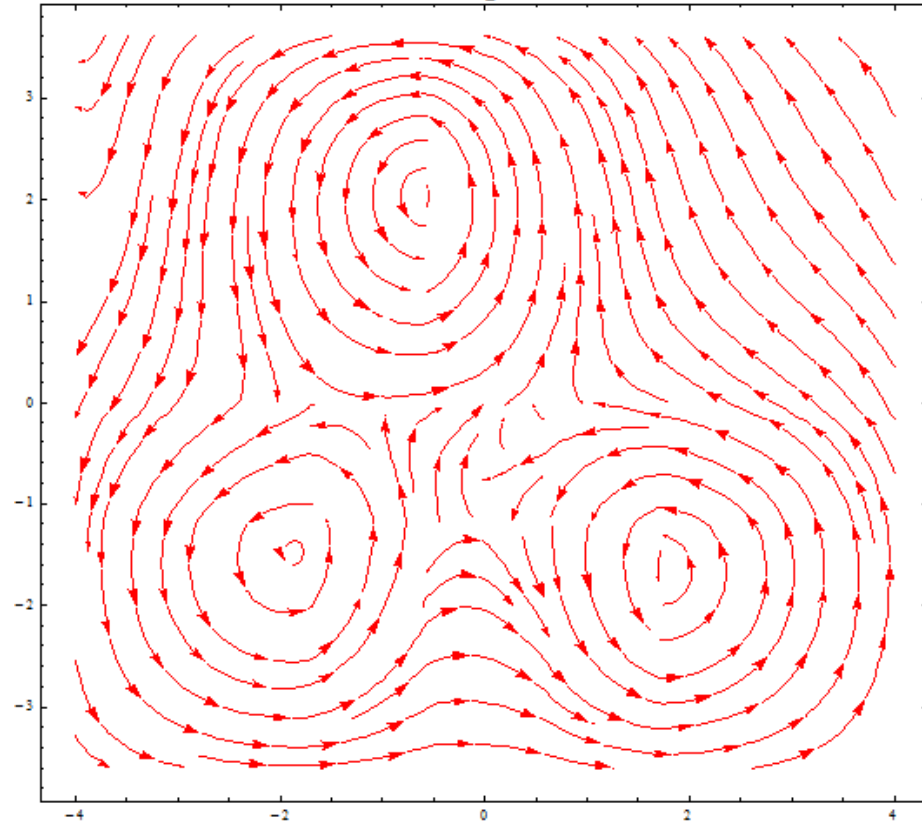
Начальный момент времени. Видны начальное движение тороидальной скорости и мелкие слабые тороидальные движения вокруг. Эти движения не приводят к генерации крупномасштабных структур с неустойчивыми параметрами.

Следующий момент времени. Видны возникшие две ближайшие к началу возмущению облачные структуры и слабое, почти затухшее начальное тороидальное возмущение.

Vtor в момент времени 1.09938



Vtor в момент времени 2.03313



Более поздний момент времени. Две первые облачные структуры усиливаются, а третья структура почувствовала движение воздуха от первых двух структур и начинает развиваться. Начальное тороидальное возмущение полностью затухло.

Ещё более поздний момент времени. Две первые облачные структуры продолжают развиваться, а третья структура, согласно заданным параметрам самая энергетическая, их нагоняет.