

# Генерация вихревой структуры в ограниченной области спиральной турбулентности

П.Б. Руткевич, Б.П. Руткевич

# Спиральная турбулентность

Работы по спиральной турбулентности в нашем отделе начались в 1983 году. Вначале речь шла только о возможности развития какой-то неустойчивости в условиях спиральной турбулентности. Потом, поскольку после усреднения получались крупномасштабные уравнения, решения стали сравнивать с таким крупномасштабным явлением как тайфун.

Для построения модели тайфуна в спиральной турбулентности пришлось подключить ещё кое-какие атмосферные элементы, такие, например, как стратификацию. В 1988 году вышла работа [1] в которой была построена модель генерации вихревой структуры типа тайфуна под действием спиральной турбулентности. Неустойчивость получилась спирально-конвективная. При малых значениях параметра спиральности неустойчивость оставалась почти конвективной. Только немного понижался порог неустойчивости (критическое число Рэлея) размеры ячеек увеличивались. При достижении параметром спиральности некоторого значения, размеры ячеек становятся столь большими, что занимают всю область со спиральной турбулентностью. При дальнейшем увеличении спиральности турбулентности критическое число Рэлея ещё более понижается и ячейка во всей области с такой турбулентностью занимает всю предоставленную область.

[1] *Моисеев С.С., Руткевич П.Б., Тур А.В., Яновский В.В.* [Вихревое динамо в конвективной среде со спиральной турбулентностью](#) // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1988. Т. 94. Вып. 2. С. 144-153.

# АКА неустойчивость 1

Работы по спиральной турбулентности не являются единственной попыткой обнаружить неустойчивость в гидродинамике изначально неподвижной среды. Для этой цели была построена методика разложения решения нелинейных дифференциальных уравнений по малому параметру (по числу Рейнольдса  $R \ll 1$ ). Первая работа на эту тему вышла в 1987 году [1]. Это, так называемый, АКА – эффект (Анизотропный Кинетический Альфа эффект). Авторы применили необычный для теории турбулентности математический аппарат, что позволило выделить порядки разложения по малому параметру (по  $R \ll 1$ ) и получить крупномасштабные уравнения из соответствующих секулярных соотношений, которые появляются во многих порядках разложения. Такая схема нелинейных расчётов, хотя довольно сложная технически, выглядела очень привлекательно. Поскольку искомые крупномасштабные решения оказывались по амплитуде больше, чем исходные линейные решения основного состояния, такая схема разложений по малому параметру являлась единственной в своём роде. Эта схема применялась также и в других работах.

[1] U. Frisch, Z.S. She and P. L. Sulem, “Large-Scale Flow Driven by the Anisotropic Kinetic Alpha Effect,” *Physica D*, Vol. 28, No. 3, 1987, pp. 382-392.

# АКА неустойчивость 2

Однако, как выяснилось, рассматриваемая нелинейная схема содержит существенной недостаток - секулярное условие, приводящее к изменению геометрии поля скорости. Крупномасштабное поле скорости перестаёт быть трёхмерным векторным полем, каковым было изначальное мелкомасштабное поле, становится двухмерным векторным полем и зависит только от одной координаты, которая оказывается ортогональной к плоскости крупномасштабной скорости, например:  $V_x(t,z)$  и  $V_y(t,z)$ , в то время как  $V_z(t,z)=0$ .

Это приводит к полному выхолащиванию задачи на крупном масштабе. Такая схема оказывается совершенно непригодной для исследования любой физической проблемы, поскольку искомые движения крупномасштабной структуры, очевидно, трёхмерные.

# Исходные уравнения

В работе [1] приводятся уравнения генерации и эволюции крупномасштабных вихрей на основе спиральной турбулентности. В работе было показано, что для некоторых значений параметров в жидкости возникает новый тип неустойчивости, приводящий к генерации крупного вихря с нетривиально топологией. Данный подход оказался очень удобен для изучения тайфунов, поскольку это единственная модель, в которой неустойчивость оказывается обусловленной соленоидальными полями скорости.

Уравнения для потенциалов полоидального и тороидального полей скорости :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)^2 \Delta\varphi - Ra_S \Delta_{\perp} \varphi = -Ra_S \cdot s\mu_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \left(\Delta_{\perp} - (\vec{e}\nabla)^2\right) \psi$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \psi = -Ra_S \cdot s\mu_1 (\vec{e}\nabla)^2 \varphi \quad \vec{V}_P = \text{rotrot}(\vec{e}\varphi) \quad \vec{V}_T = \text{rot}(\vec{e}\psi) \quad \vec{V} = \vec{V}_P + \vec{V}_T$$

$\vec{e}$  — вертикально направленный единичный вектор.

[1] Мусеев С.С., Руткевич П.Б., Тур А.В., Яновский В.В. [Вихревое динамо в конвективной среде со спиральной турбулентностью](#) // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1988. Т. 94. Вып. 2. С. 144-153.

# Уравнение для потенциала полоидального поля

Эту систему можно переписать в виде одного уравнения. Предполагая для упрощения вертикальную зависимость полей скорости от координаты  $z$ :

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, t) \sin K_z z \quad \psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, t) \sin K_z z$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right)^2 \Delta \varphi - Ra_S \Delta_{\perp} \varphi = - (Ra_S \cdot s \mu_{10})^2 (\Delta_{\perp} + K_z^2) K_z^2 \varphi$$

Уравнение описывает неустойчивость, которую можно назвать спирально-конвективной, поскольку спиральность турбулентности среды усиливает конвективную неустойчивость и приводит к появлению тороидальной компоненты скорости, так что искомая крупномасштабная структура становится вихревой. Для исследования генерационных возможностей спиральной турбулентности нужно построить аналитическое решение уравнения.

# Уравнение для фундаментального решения

Имея ввиду генерационные свойства спирально-конвективной, неустойчивости ограничимся первой производной по времени. Уравнение тогда принимает вид:

$$-2\Delta^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Delta^3 \varphi - Ra_S \Delta_{\perp} \varphi = - (Ra_S \cdot s\mu_{10})^2 (\Delta_{\perp} + K_z^2) K_z^2 \varphi$$

Зададим начальное условие  $\varphi|_{t \rightarrow 0} = \varphi_0(x, y)$

Запишем уравнение для получения фундаментального решения  $\varepsilon(x, y, t)$

$$\begin{aligned} & -2\Delta^2 \frac{\partial \varepsilon(x, y, t)}{\partial t} + \Delta^3 \varepsilon(x, y, t) - Ra_S \Delta_{\perp} \varepsilon(x, y, t) + \\ & + (Ra_S \cdot s\mu_{10})^2 (\Delta_{\perp} + K_z^2) K_z^2 \varepsilon(x, y, t) = \delta(x, y, t). \end{aligned}$$

# Фундаментальное решение

Получим фундаментальное решение методом преобразования Фурье.

$$\varepsilon(x, y, t) = \frac{\text{Exp}\left(-\frac{(K^2 - Ra^2 s^2)(K^4 - Ra + 3K^2 Ra^2 s^2)t^2 + K^4(x^2 + y^2)}{2(K^4 - Ra + 3K^2 Ra^2 s^2)t}\right)}{2\pi\sqrt{\frac{(K^4 - Ra + 3K^2 Ra^2 s^2)t^2}{K^8}}}$$

Перепишем уравнение для потенциала полоидального поля скорости в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\Delta^3}{2\Delta^2} \varphi + (Ra_s + Ra_a(x, y)) \frac{\Delta_{\perp}}{2\Delta^2} \varphi = \\ = \left( (Ra_s + Ra_a(x, y)) \cdot s\mu_{10} \right)^2 \frac{(\Delta_{\perp} + K_z^2)}{2\Delta^2} K_z^2 \varphi, \end{aligned}$$

$Ra_a(x, y)$  – добавка к числу Рэлея, зависящая от координат.

# Решение для потенциала полоидального поля

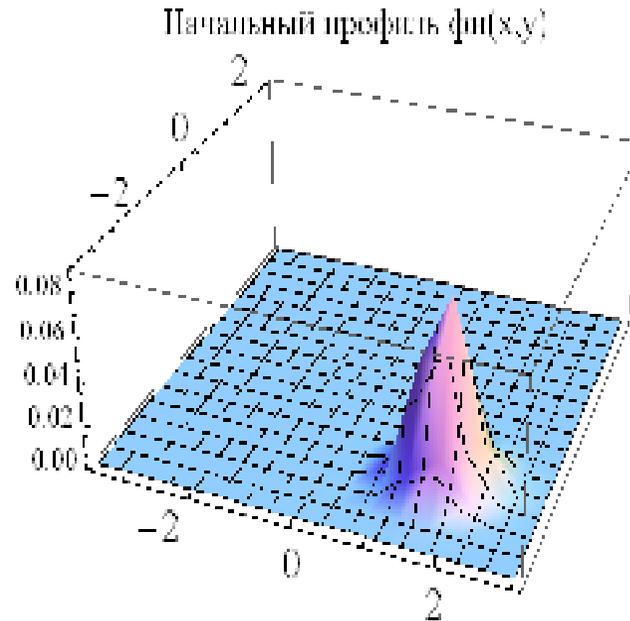
Решение уравнения в предположении о малости вертикальных размеров решений по сравнению с горизонтальными размерами может быть представлено в виде

$$\varphi(x, t) = \int_0^t \int_R \frac{f(\xi_x, \xi_y, \tau)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^2} \varepsilon(x - \xi_x, y - \xi_y, t) d\xi_x d\xi_y dt +$$
$$+ \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^2} \int_R \varphi_0(\xi_x, \xi_y) \varepsilon(x - \xi_x, y - \xi_y, t) d\xi_x d\xi_y,$$

$f(\xi_x, \xi_y, \tau)$  - правая часть уравнения, в которую включим зависимость коэффициентов от независимых переменных и возможную нелинейность. Неоднородное распределение температуры в атмосфере включим в зависимость числа Рэлея от координат, так что во всей рассматриваемой области будет иметь место устойчивая стратификация, за исключением областей с «сильным подогревом».

# Начальный момент времени

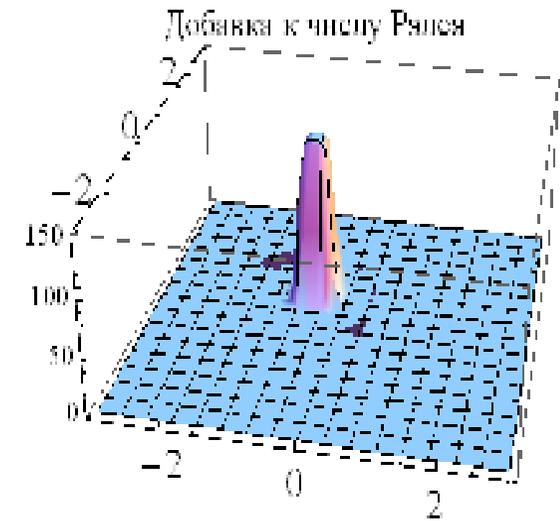
Пусть в начальный момент времени в атмосфере существует движение воздуха типа тайфуна. Предположим, что это движение воздуха не обусловлено подогревом в атмосфере. Таким образом, это движение в скором времени неизбежно должно затухнуть. И его кинетическая энергия должна распределиться в окружающем пространстве и диссипировать



Начальное условие потенциала полоидальной компоненты поля скорости

# Добавка к числу Рэлея

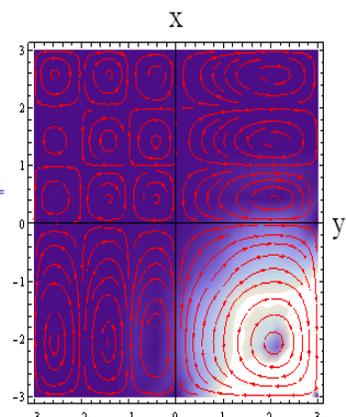
Предположим, что на некотором отдалении от начального движения воздуха имеются локализованная облачная структура, обусловленная подогревом в атмосфере с соответствующими числами Рэлея и спиральностями. Пусть на фоне устойчивой стратификации значения чисел Рэлея и спиральности в этих облачных структурах превосходят соответствующие критические значения для обеспечения конвективной спиральной неустойчивости. Если кинетическая энергия начального движения достигнет этих облачных структур, то в силу конвективной спиральной неустойчивости в них начнутся местные движения воздуха. Таким образом, в этой облачной структуре с достаточно большими значениями локальных чисел Рэлея и параметра спиральности на более поздних графиках эволюции мы должны увидеть усиление скорости.



$$Ra_1(x, y) = Ra_{10} \left( e^{-\frac{(x-x_1)^6}{r^6}} e^{-\frac{(y-y_1)^6}{r^6}} \right)$$

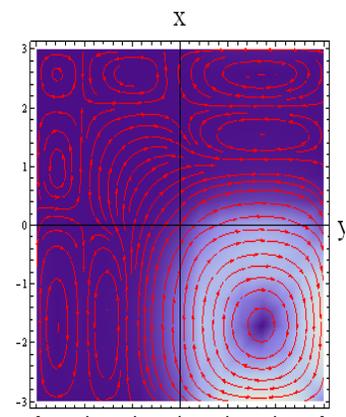
At time = 0.001

V<sub>tor</sub> в момент времени 0.001



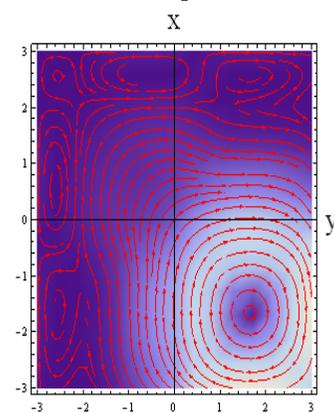
At time = 0.250833

V<sub>tor</sub> в момент времени 0.250833



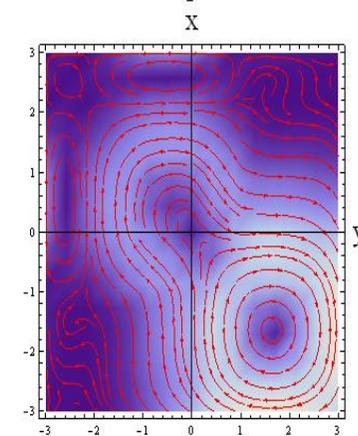
At time = 0.4676

V<sub>tor</sub> в момент времени 0.4676



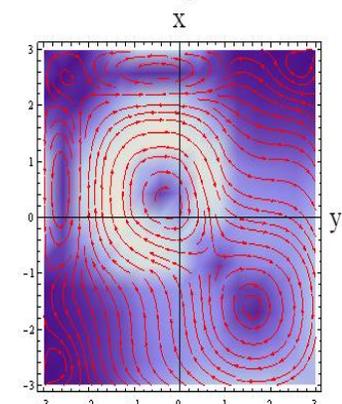
At time = 0.500667

V<sub>tor</sub> в момент времени 0.500667



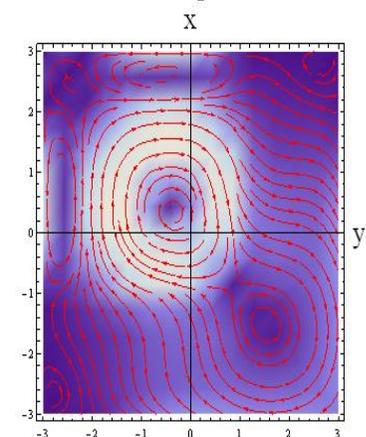
At time = 0.7505

V<sub>tor</sub> в момент времени 0.7505



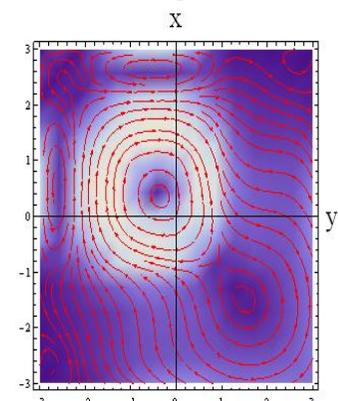
At time = 0.9342

V<sub>tor</sub> в момент времени 0.9342



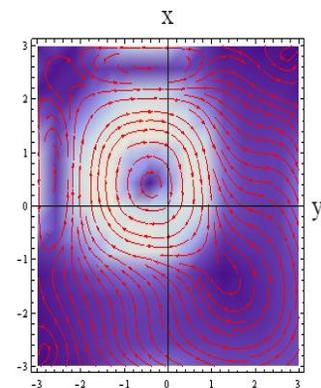
At time = 1.00033

V<sub>tor</sub> в момент времени 1.00033

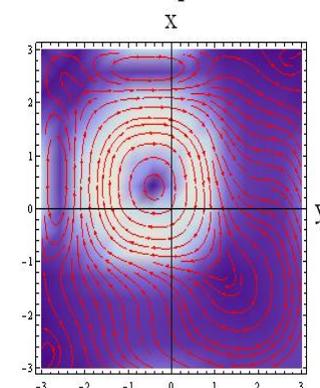


At time = 1.25017

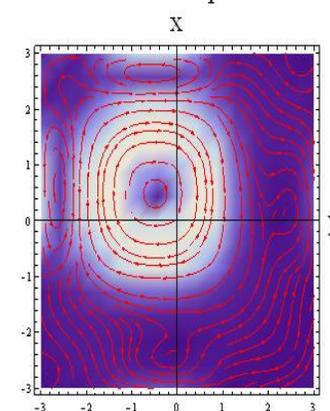
V<sub>tor</sub> в момент времени 1.25017



V<sub>tor</sub> в момент времени 1.4008

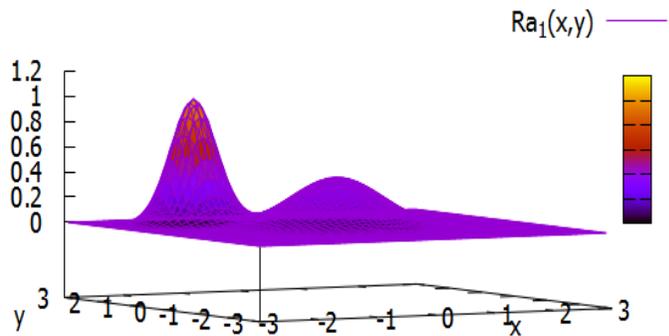


V<sub>tor</sub> в момент времени 7.

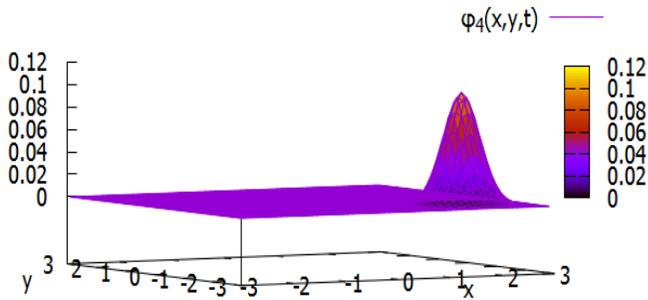


## Тороидальная компонента поля скорости

Rayleigh(x,y)

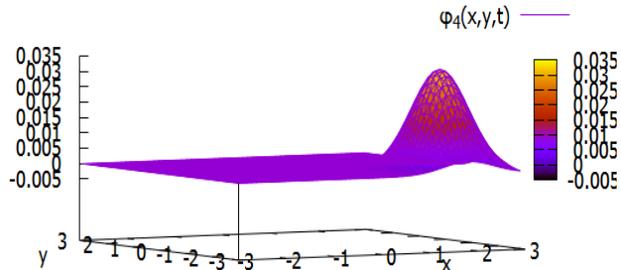


Profile of phi:  $\varphi_4(x,y,t=0)$

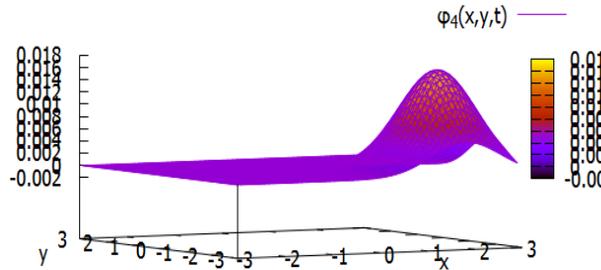


$Ra=40, Ra1=4,$   
 $Ra2=1,$   
 $s=0,07$

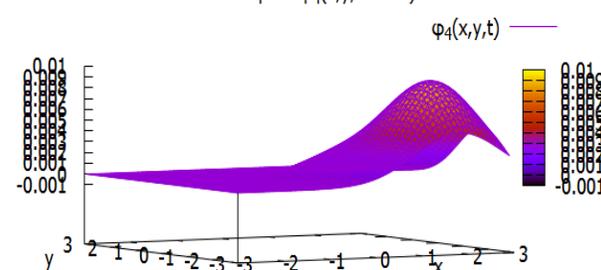
Profile of phi:  $\varphi_4(x,y,t=0.06)$



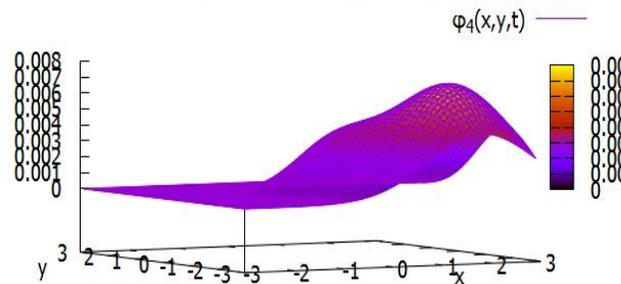
Profile of phi:  $\varphi_4(x,y,t=0.14)$



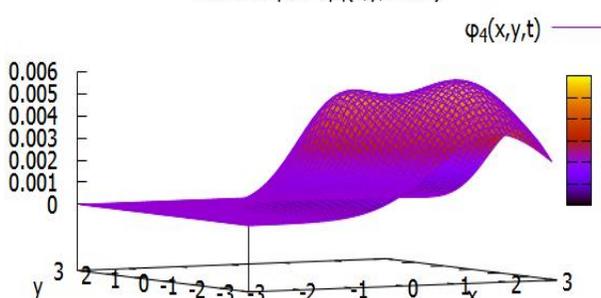
Profile of phi:  $\varphi_4(x,y,t=0.26)$



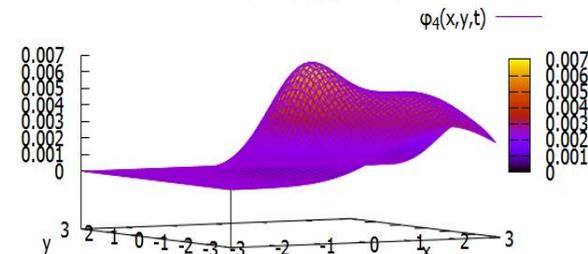
Profile of phi:  $\varphi_4(x,y,t=0.34)$

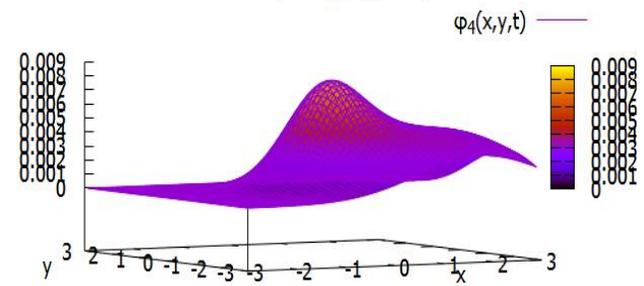
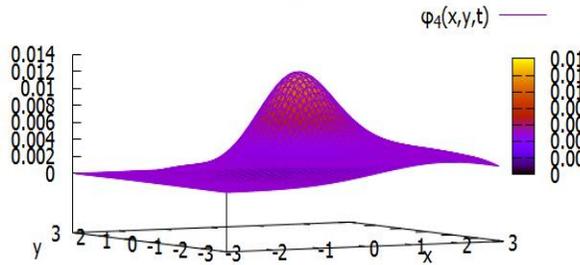
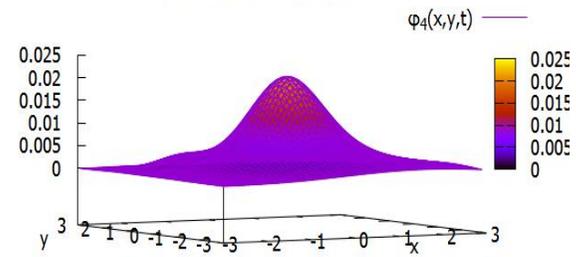
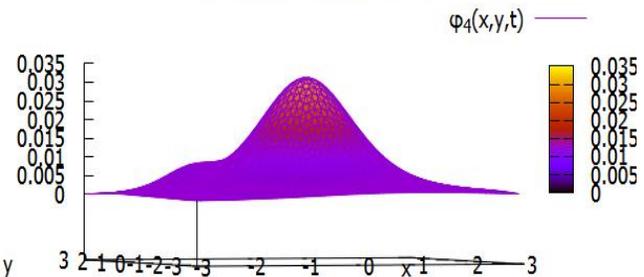
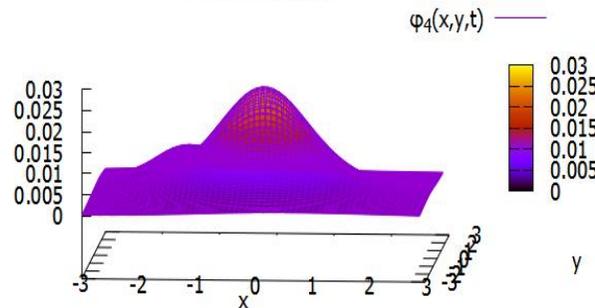
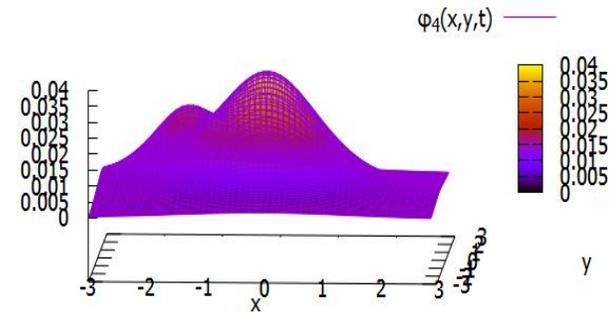
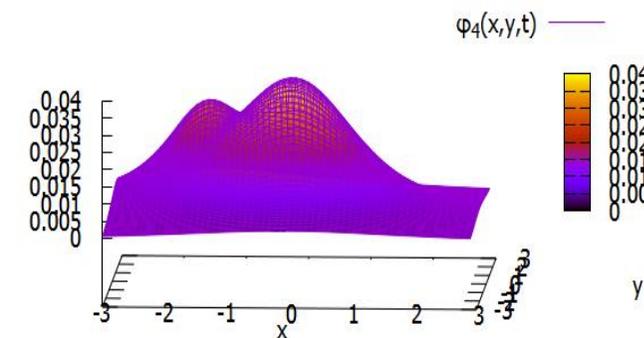
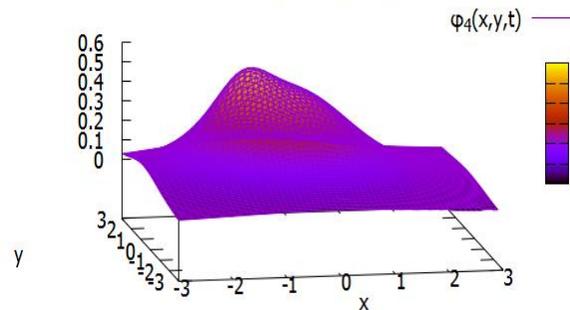


Profile of phi:  $\varphi_4(x,y,t=0.4)$



Profile of phi:  $\varphi_4(x,y,t=0.46)$



Profile of phi:  $\varphi_4(x,y,t=0.5)$ Profile of phi:  $\varphi_4(x,y,t=0.62)$ Profile of phi:  $\varphi_4(x,y,t=0.8)$ Profile of phi:  $\varphi_4(x,y,t=0.98)$ Profile of phi:  $\varphi_4(x,y,t=1.2)$ Profile of phi:  $\varphi_4(x,y,t=1.95)$ Profile of phi:  $\varphi_4(x,y,t=2.4)$ Profile of phi:  $\varphi_4(x,y,t=2.8)$ 

# Зависимость влажности от вертикальной скорости

Предполагаем линейную зависимость спиральности от вертикальной скорости

$$\begin{aligned} v_{PZ} &= \text{rot rot}(\vec{e} \varphi) = \text{grad div}(\vec{e} \varphi) - \Delta(\vec{e} \varphi) = \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial z} \varphi - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = -\Delta_{\perp} \varphi. \end{aligned}$$

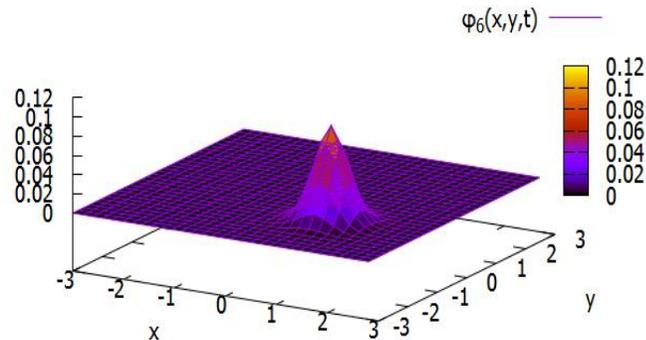
Рассмотрим случай зависимости спиральности (влажности) от потенциала полоидального поля

$$s = s_0 + s_1 \Delta_{\perp} \varphi.$$

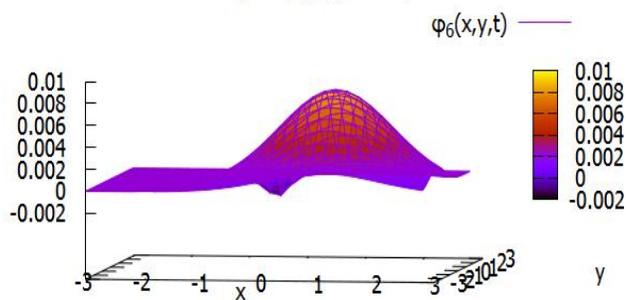
Уравнение для потенциала полоидального поля скорости становится нелинейным и принимает вид:

$$\left( 2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta - \Delta^2 \right) \Delta \varphi + Ra \Delta_{\perp} \varphi = Ra^2 \left( (s_0 + s_1 \Delta_{\perp} \varphi) \mu_1 \right)^2 \left( \Delta_{\perp} + k_z^2 \right) k_z^2 \varphi.$$

Profile of phi:  $\varphi_6(x,y,t=0)$

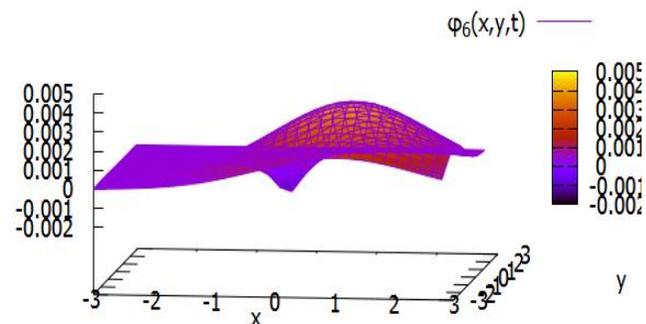


Profile of phi:  $\varphi_6(x,y,t=0.25)$

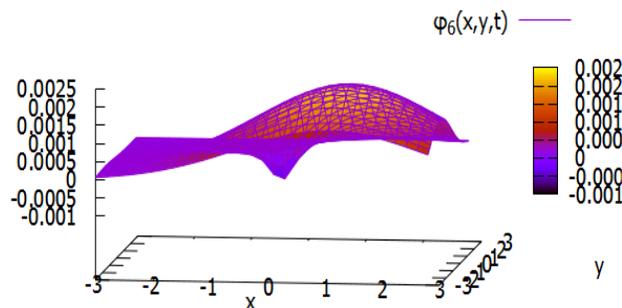


$Ra=7,$   
 $s_0=0,43,$   
 $s_1=0,1$

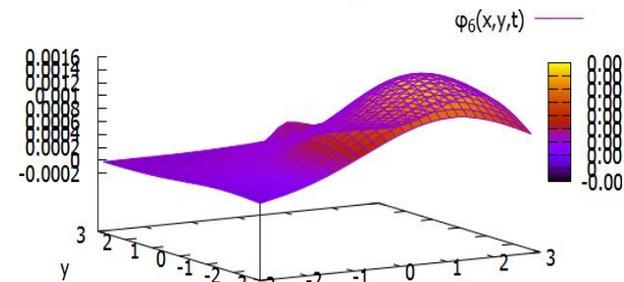
Profile of phi:  $\varphi_6(x,y,t=0.5)$



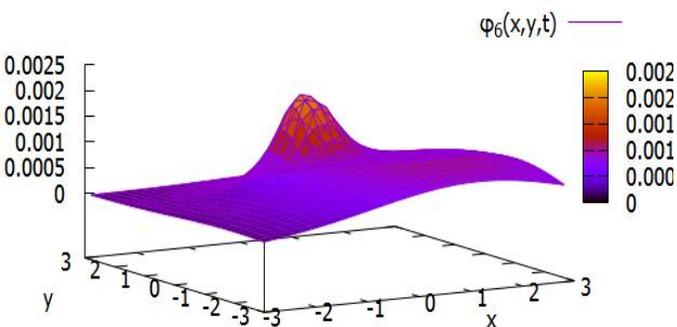
Profile of phi:  $\varphi_6(x,y,t=0.75)$



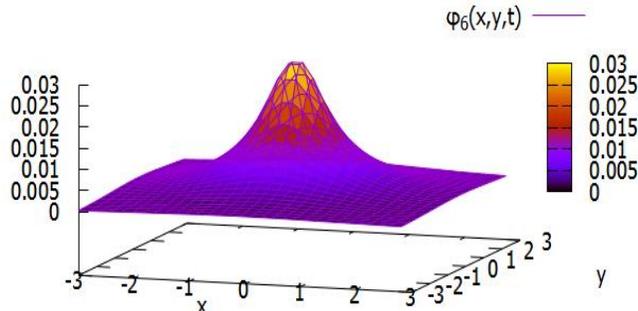
Profile of phi:  $\varphi_6(x,y,t=1)$



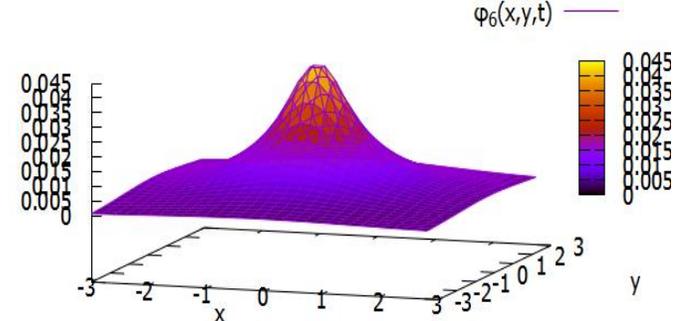
Profile of phi:  $\varphi_6(x,y,t=1.25)$



Profile of phi:  $\varphi_6(x,y,t=3)$



Profile of phi:  $\varphi_6(x,y,t=4)$



Потенциал полоидальной компоненты поля