О движении крупномасштабной вихревой структуры в декартовой системе координат

П.Б. Руткевич, Б.П. Руткевич

Спиральная турбулентность 1

Основным вопросом исследования крупномасштабных вихрей типа тропического циклона, очевидно, является вопрос о его генерации. Это так называемый вопрос о построении модели крупномасштабного вихря. Хорошо известно, что на сегодняшний день общепринятой модели генерации вихря типа тропического циклона не существует. Хотя попыток создать такую модель существует много. Сейчас уже начинают делать огромные 3Д модели, считают их на суперкомпьютерах. Но в основе этих моделях нет никакой новой неустойчивости. Поэтому ценность этих моделей невысока. Часто в таких моделях используют аксиальную симметрию.

Вторым по важности вопросом такого исследования является вопрос о движении крупномасштабного вихря. Понятно, что такую задачу можно ставить только, описывая вихрь как бы на географической карте. Таким образом, возникает задача математического описания вихря в декартовой системе координат. Даже если построена «хорошая» модель генерации крупномасштабной структуры в аксиальных координатах, формулировка этой же модели в декартовых координатах оказывается достаточно сложной задачей. В работе 1988 года была предложена модель неустойчивости крупномасштабной вихревой структуры под действием спиральной турбулентности.

[1] *Моисеев С.С., Руткевич П.Б., Тур А.В., Яновский В.В.* Вихревое динамо в конвективной среде со спиральной турбулентностью // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1988. Т. 94. Вып. 2. С. 144-153.

Спиральная турбулентность 2

Вычисления проводились по типу разложения нелинейных уравнений по малому параметру (по малому числу Рейнольдса). Однако, поскольку мелкомасштабное поле скорости принималось случайным, в качестве решения линейной задачи выбирались не тригонометрические функции или решения соответствующего линейного оператора, а коррелятор случайного поля. Для получения аналога секулярных слагаемых в условиях случайного поля скорости применялась формула Фуруцу–Новикова. Эта модель описывала генерацию крупномасштабной структуры. В работе 1988 года целью было лишь установление факта возникновения неустойчивости, и потому была рассмотрена только одна главная мода на крупном масштабе в аксиально симметричной постановке.

В настоящей работе мы исследуем крупномасштабные уравнения работы 1988 года на основе решения задачи в частных производных с тремя независимыми переменными – время и горизонтальные координаты в декартовой системе координат. В качестве вертикальной зависимости структуры используем решение конвективной неустойчивости со сводными граничными условиями на горизонтальных границах области.

[1] *Моисеев С.С., Руткевич П.Б., Тур А.В., Яновский В.В.* Вихревое динамо в конвективной среде со спиральной турбулентностью // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1988. Т. 94. Вып. 2. С. 144-153.

Спиральная турбулентность 3

Теория генерации вихревой структуры на основе спиральной турбулентности в этом случае становится одной из ведущих моделей тайфуна, поскольку в этой модели обе соленоидальные компоненты скорости воздуха входят в положительную обратную связь, чего нет, например, в конвективной неустойчивости. В частности, поэтому конвективная неустойчивость сама по себе не может быть основой в моделях тайфуна. Отметим, кстати, что в гидродинамике конвекция является единственной неустойчивостью (в изначально неподвижной сплошной среде). Поэтому теоретическое моделирование феномена тайфуна натыкается на довольно сложную проблему.

Спиральная турбулентность 4

Конвективная неустойчивость на больших горизонтальных размерах формирует большое количество ячеек. Размеры этих ячеек имеют порядок вертикального размера горизонтального слоя воздуха. А другой неустойчивости (в изначально неподвижном воздухе) не существует. В результате для построения адекватной модели тайфуна исследователям приходится искать некоторую новую неустойчивость, что представляет собой значительную теоретическую проблему. Конвективно-спиральная неустойчивость, полученная в работе [1] и исследованная в дальнейших работах, как раз и представляет собой такую новую неустойчивость, развитие которой приводит к формированию одной ячейки произвольно большого размера. Размер ячейки зависит только от области неустойчивости, что наблюдается и в реальных условиях. Горизонтальные размеры тайфунов при практически одинаковых вертикальных размерах варьируются более чем на порядок. Таким образом, получается, что концепция спиральной турбулентности оказывается важным элементом при построении теории тайфунов. И потому её исследование в аспекте построения теории тайфунов становится весьма целесообразным.

Спиральная турбулентность 5

В работе 1988 года был установлен лишь факт возникновения неустойчивости. И потому зависимость решения от времени можно было считать экспоненциальной. Крупномасштабная структура типа тайфуна считалась аксиально симметричной. И потому характеристические значения уровня подогрева и значения спиральности вычислялось на основе обыкновенного дифференциального уравнения. В качестве независимой переменной рассматривался радиус структуры. В реальных условиях тайфун после своего возникновения, как хорошо известно, приходит в движение и перемещается на значительные расстояния. Вопросы о перемещении модельной вихревой структуры требуют решения уравнений соответствующих данной модели с учётом обеих горизонтальных координат, а также и времени, поскольку временная координата теперь описывает не только экспоненциальный рост возмущения, но и перемещение структуры на плоскости «океана». Таким образом, даже в простейшем случае задача должна описываться уравнениями в частных производных. Причём независимых переменных должно быть, как сказано выше, не менее трёх. В более сложных случаях желательно также учитывать и вертикальную координату.

В работах [1-2] описывается внутренний источник спиральности, связанный с полем потенциального вихря в атмосфере Земли. В бароклинной жидкости спиральность поля скорости, не является консервативной характеристикой движения, а имеет внутренний источник, связанный с полем потенциального вихря. В работах [1-2] устанавливается также соотношение между эволюцией поля потенциального вихря и спиральностью поля скорости. Такая обратная связь оказывается положительной и реализуется при конденсации водяного пара в поле скорости, отвечающему винтовому движению воздуха. Это позволяет получить условие спонтанной генерации спиральности во влажной атмосфере. В настоящей работе мы будем считать, что спиральность параметризует влажность в атмосфере. Таким образом, конвективно-спиральную неустойчивость в атмосфере Земли можно считать обусловленной влажностью, а влажность является естественным источником энергии в атмосфере [3-4].

1.Курганский М.В. Генерация спиральности во влажной атмосфере. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1993, Т 29, №4, с 464-469.
2.Курганский М.В. О связи между спиральностью и потенциальным вихрём сжимаемой вращающейся жидкости. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1989, Т 25, № 12. С. 1326-1329.
3.Руткевич П.Б., Голицын Г.С., Руткевич Б.П., Шелехов А.П. Развитие подоблачного слоя над морем при вторжении холодного воздуха // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2018. Т. 54. № 4. С. 386-395.
4.Руткевич П.Б., Голицын Г.С., Руткевич Б.П. Формирование облачности над океаном при вторжении холодного воздуха // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2018. Т. 54. № 5. С. 516–524.

Исходные уравнения

В работе [1] приводятся уравнения генерации и эволюции крупномасштабных вихрей на основе спиральной турбулентности. В работе было показано, что для некоторых значений параметров в жидкости возникает новый тип неустойчивости, приводящий к генерации крупного вихря с нетривиально топологией. Данный подход оказался очень удобен для изучения тайфунов, поскольку это единственная модель, в которой неустойчивость оказывается обусловленной соленоидальными полями скорости.

Уравнения для потенциалов полоидального и тороидального полей скорости :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)^2 \Delta\varphi - Ra_S \Delta_\perp \varphi = -Ra_S \cdot s\mu_1 \left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\left(\Delta_\perp - \left(\vec{e}\nabla\right)^2\right)\psi$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)\psi = -Ra_S \cdot s\mu_1 \left(\vec{e}\nabla\right)^2 \varphi \qquad \vec{V}_P = rotrot\left(\vec{e}\,\varphi\right) \qquad \vec{V}_T = rot\left(\vec{e}\,\psi\right) \qquad \vec{V} = \vec{V}_P + \vec{V}_T$$

$\vec{e}$ – вертикально направленный единичный вектор.

Уравнение для потенциала полоидального поля

Эту систему можно переписать в виде одного уравнения. Предполагая для упрощения вертикальную зависимость полей скорости от координаты z:

$$\varphi(x,y,z,t)=\varphi(x,y,t)\sin K_z z \qquad \psi(x,y,z,t)=\psi(x,y,t)\sin K_z z$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)^2\Delta\varphi - Ra_S\Delta_\perp\varphi = -\left(Ra_S\cdot s\mu_{10}\right)^2\left(\Delta_\perp + K_z{}^2\right)K_z{}^2\varphi$$

Уравнение описывает неустойчивость, которую можно назвать спирально-конвективной, поскольку спиральность турбулентности среды усиливает конвективную неустойчивость и приводит к появлению тороидальной компоненты скорости, так что искомая крупномасштабная структура становится вихревой. Для исследования генерационных возможностей спиральной турбулентности нужно построить аналитическое решение уравнения.

Уравнение для фундаментального решения

Имея ввиду генерационные свойства спирально-конвективной, неустойчивости ограничимся первой производной по времени. Уравнение тогда принимает вид:

$$-2\Delta^2\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\Delta^3\varphi-Ra_S\Delta_\perp\varphi=-\left(Ra_S\cdot s\mu_{10}\right)^2\left(\Delta_\perp+K_z{}^2\right)K_z{}^2\varphi$$

Зададим начальное условие $\left.\varphi\right|_{t\to 0}=\varphi_0(x,y)$

Запишем уравнение для получения фундаментального решения $\varepsilon(x,y,t)$

$$\frac{\partial\varepsilon(x,y,t)}{\partial t}-\frac{\Delta}{2}\varepsilon(x,y,t)+Ra\frac{\Delta_\perp}{2\Delta^2}\varepsilon(x,y,t)+$$

$$-\left(Ra\cdot s\mu_1\right)^2\frac{\left(\Delta_\perp+k_z{}^2\right)k_z{}^2}{2\Delta^2}\varepsilon(x,y,t)=\delta(x,y,t).$$

Фундаментальное решение

Получим фундаментальное решение методом преобразования Фурье.

$$\varepsilon(x,y,t)=\frac{Exp\left(-\frac{\left(K^2-Ra^2s^2\right)\left(K^4-Ra+3K^2Ra^2s^2\right)t^2+K^4\left(x^2+y^2\right)}{2\left(K^4-Ra+3K^2Ra^2s^2\right)t}\right)}{2\pi\sqrt{\frac{\left(K^4-Ra+3K^2Ra^2s^2\right)t^2}{K^8}}}$$

Теперь учтём начальное движение атмосферы и неоднородность температурной стратификации над исследуемой «акваторией». Считая, что параметр спиральности параметризует влажность атмосферы, предположим, что скрытая теплота конденсации выделяется в областях с восходящими потоками воздуха. То есть спиральность зависит от полоидального поля скорости $s(\varphi)=s_0+s_1\varphi$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\Delta}{2}\varphi-Ra\frac{\Delta_\perp}{2\Delta^2}\varphi+\left(Ra\cdot(s_0+s_1\varphi)\mu_1\right)^2\frac{\left(\Delta_\perp+k_z{}^2\right)k_z{}^2}{2\Delta^2}\varphi=0$$

Уравнение для полоидального поля

Перенесём все слагаемые в уравнении с функцией $s_1\varphi$ в праву́ю часть уравнения.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\Delta}{2}\varphi+Ra\frac{\Delta_\perp}{2\Delta^2}\varphi-\left(Ra\cdot s_0\mu_1\right)^2\frac{\left(\Delta_\perp+k_z{}^2\right)k_z{}^2}{2\Delta^2}\varphi=$$

$$=\left(Ra^2\cdot\left(2s_0s_1\varphi+s_1{}^2\varphi^2\right)\mu_1{}^2\right)\frac{\left(\Delta_\perp+k_z{}^2\right)k_z{}^2}{2\Delta^2}\varphi.$$

Обозначим правую часть $f\left(x,y,t\right)$.

$$f=\frac{1}{2\Delta^2}\left(Ra^2\cdot\left(2s_0s_1\varphi+s_1{}^2\varphi^2\right)\mu_1{}^2\right)\left(\Delta_\perp+k_z{}^2\right)k_z{}^2\varphi.$$

Получаем неоднородное уравнение, соответствующее однородному уравнению, для которого получено фундаментальное решение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\Delta}{2}\varphi+Ra\frac{\Delta_\perp}{2\Delta^2}\varphi-\left(Ra\cdot s_0\mu_1\right)^2\frac{\left(\Delta_\perp+k_z{}^2\right)}{2\Delta^2}k_z{}^2\varphi=f\left(\varphi\right).$$

Решение для потенциала полоидального поля

Решение уравнения может быть представлено в виде свёртки

$$\varphi(x,y,t)=\int_0^t\int_R f(\varphi)\varepsilon(x-x_1,y-y_1,t-\tau)dx_1dy_1d\tau+$$

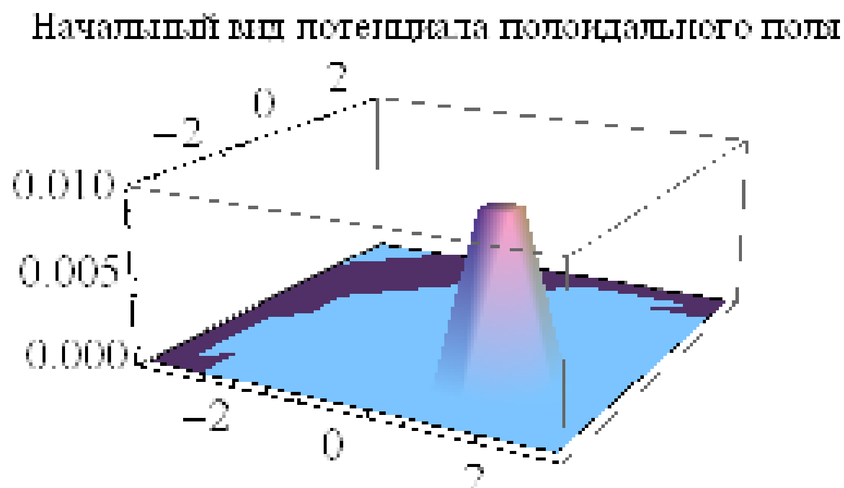
$$+\theta(t)\int_R \varphi_0(x_1,y_1)\varepsilon(x-x_1,y-y_1,t)dx_1dy_1\,.$$

$$f(\xi_x,\xi_y,\tau)$$

В формуле интегрирование по горизонтальным координатам подразумевается по всему пространству и обозначено *R*, однако в численных расчётах мы проводили интегрирование в пределах исследуемой области, поскольку мы считаем область с повышенной влажностью(спиральностью) локализованной. А также, что вдали от максимума скорости движения быстро затухают.

Начальный момент времени

Пусть в начальный момент времени в атмосфере существует движение воздуха типа тайфуна. Предположим, что это движение воздуха не обусловлено подогревом в атмосфере. Таким образом, это движение в скором времени неизбежно должно затухнуть. И его кинетическая энергия должна распределиться в окружающем пространстве и диссипировать



Начальное условие потенциала полоидальной компоненты поля скорости

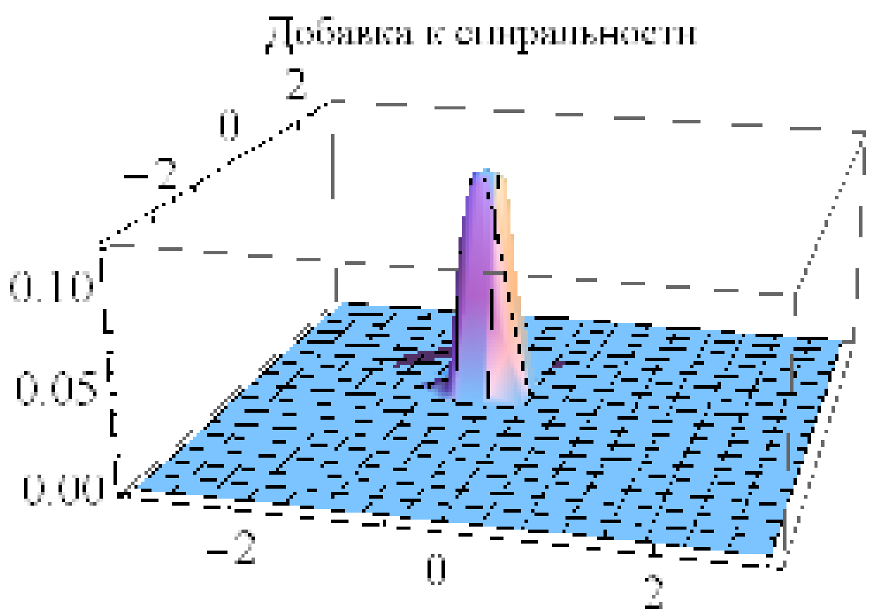
$$\varphi_0(x,y)=\varphi_0\,\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{r_0^2}\right)\exp\left(-\frac{(y-y_0)^2}{r_0^2}\right)$$

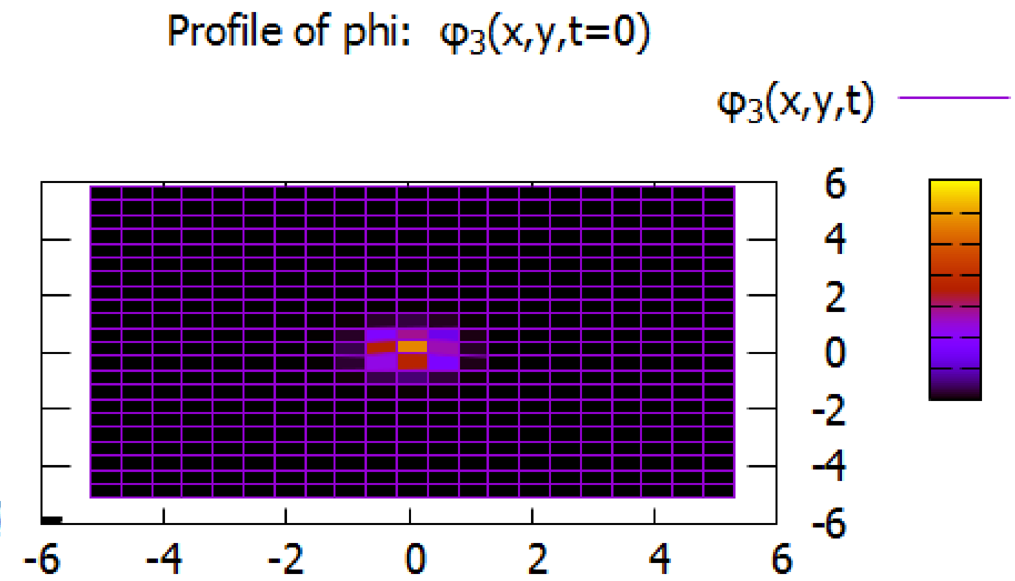
Добавка к спиральности

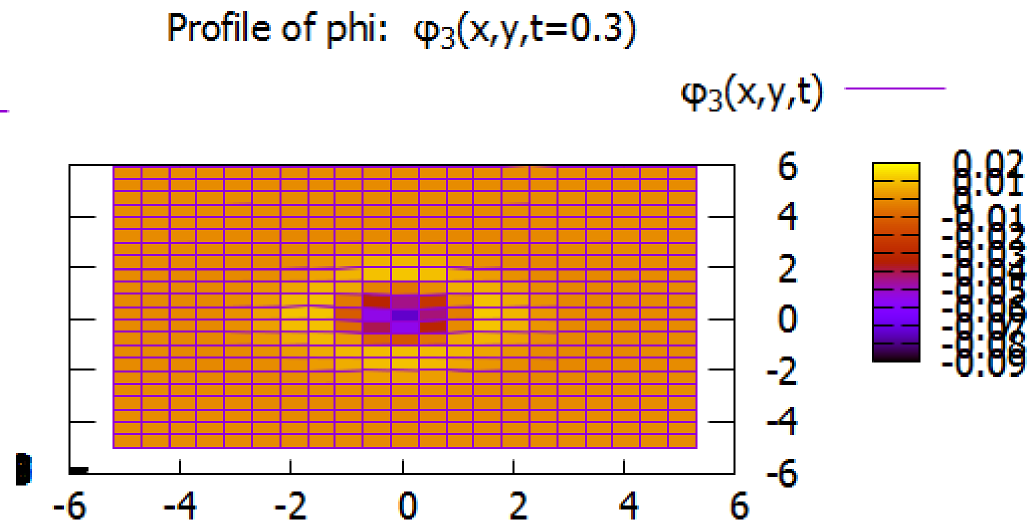
Зададим также горизонтальную зависимость добавки к спиральности:

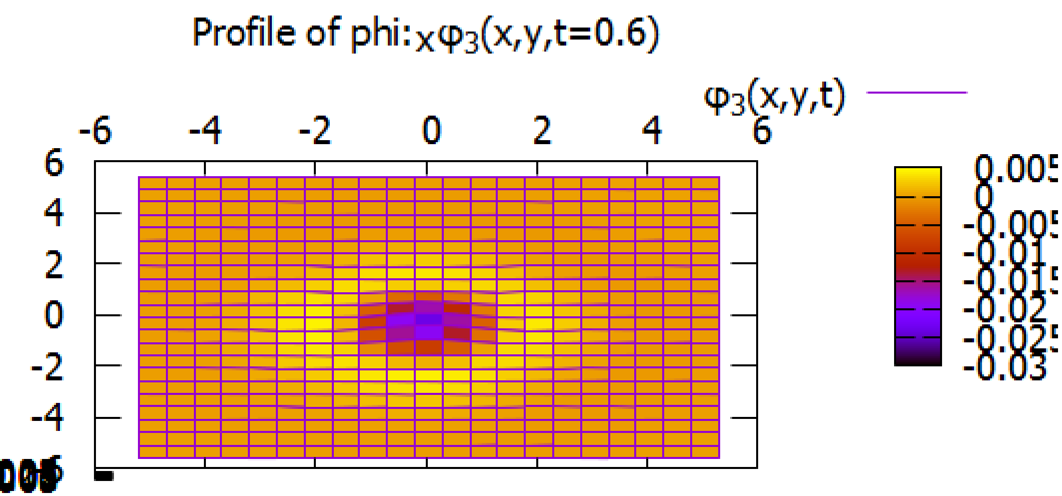
$$s(\varphi) = s_0 + s_1\varphi$$

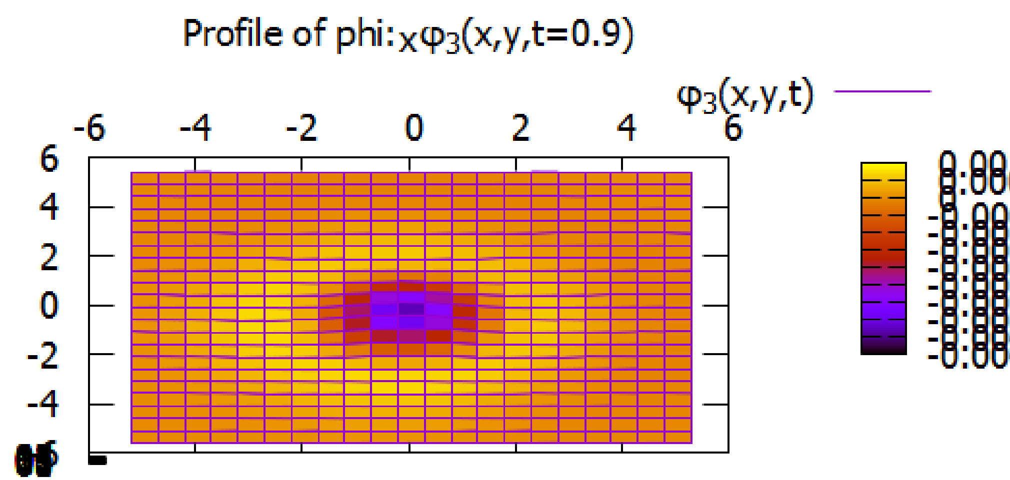
$$s_1(x, y) = s_{10} \exp\left(-\frac{(x - x_1)^6}{r_1^6} \right) \exp\left(-\frac{(y - y_1)^6}{r_1^6} \right)$$

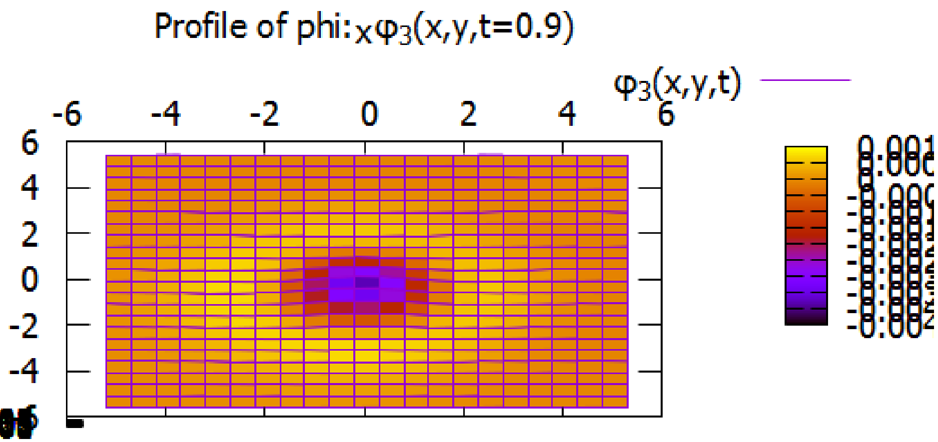


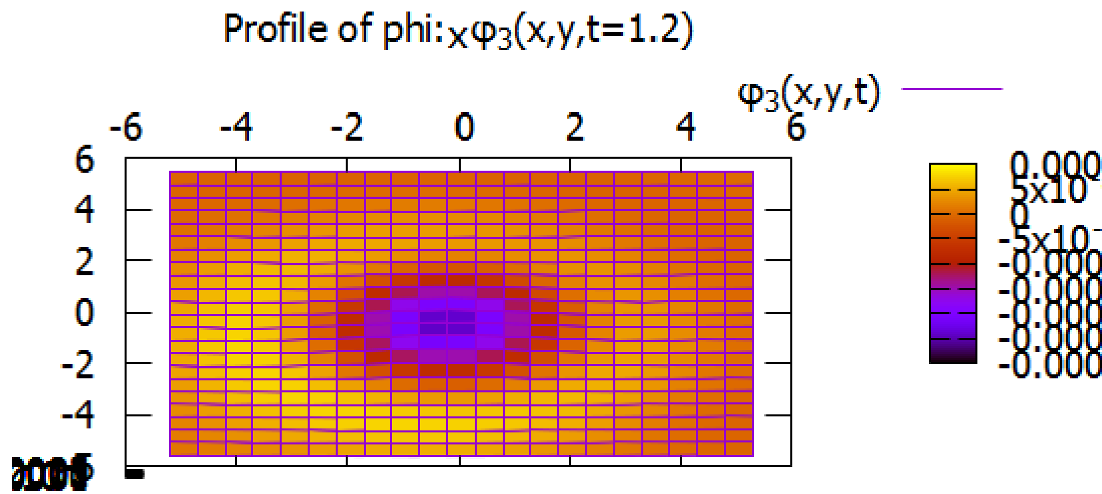

Profile of phi: φ3(x,y,t=0)
φ3(x,y,t)
-6 -4 -2 0 2 4 6
6 4 2 0 -2 -4 -6

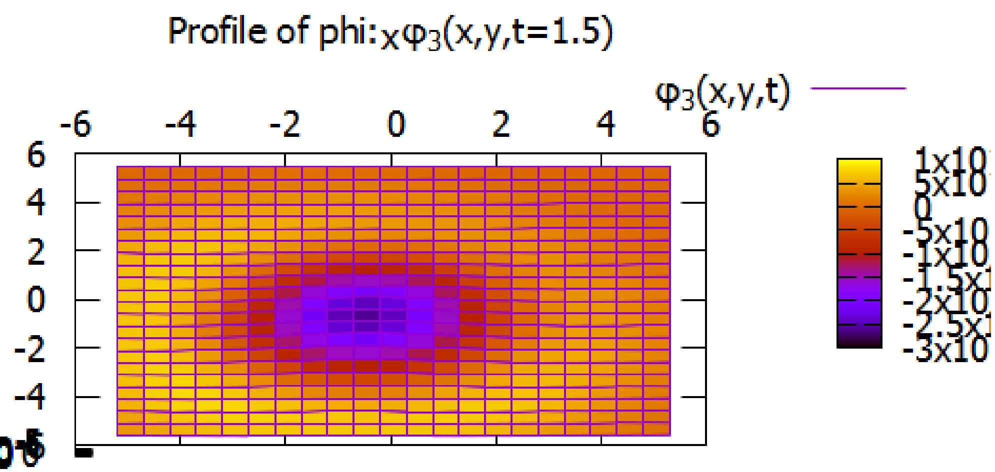

Profile of phi: φ3(x,y,t=0.3)
φ3(x,y,t)
-6 -4 -2 0 2 4 6
6 4 2 0 -2 -4 -6
0.02
-0.09

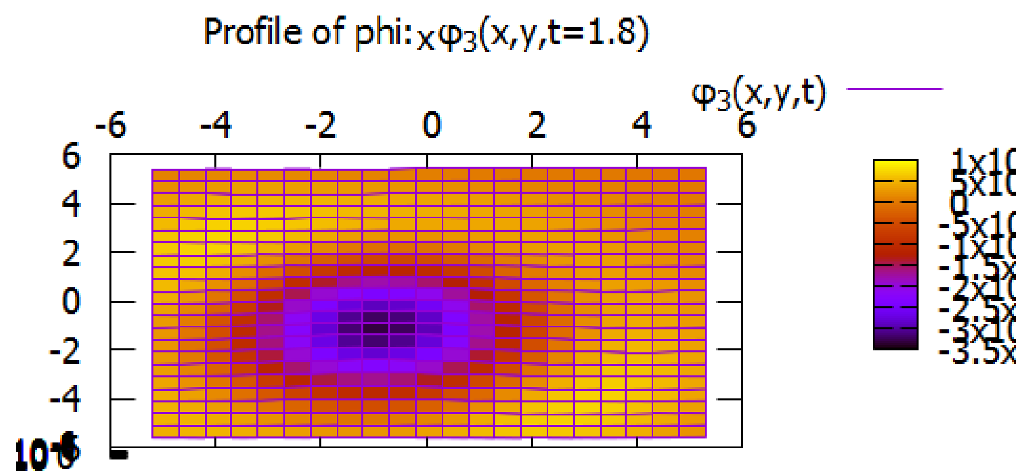

Profile of phi:xφ3(x,y,t=0.6)
φ3(x,y,t)
-6 -4 -2 0 2 4 6
6 4 2 0 -2 -4
0
-0.01
-0.02
-0.03

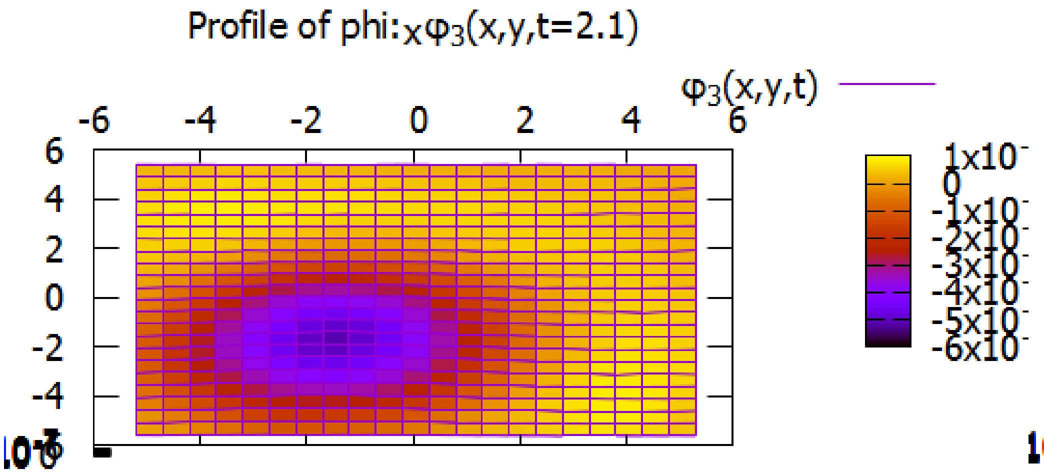

Profile of phi:xφ3(x,y,t=0.9)
φ3(x,y,t)
-6 -4 -2 0 2 4 6
6 4 2 0 -2 -4

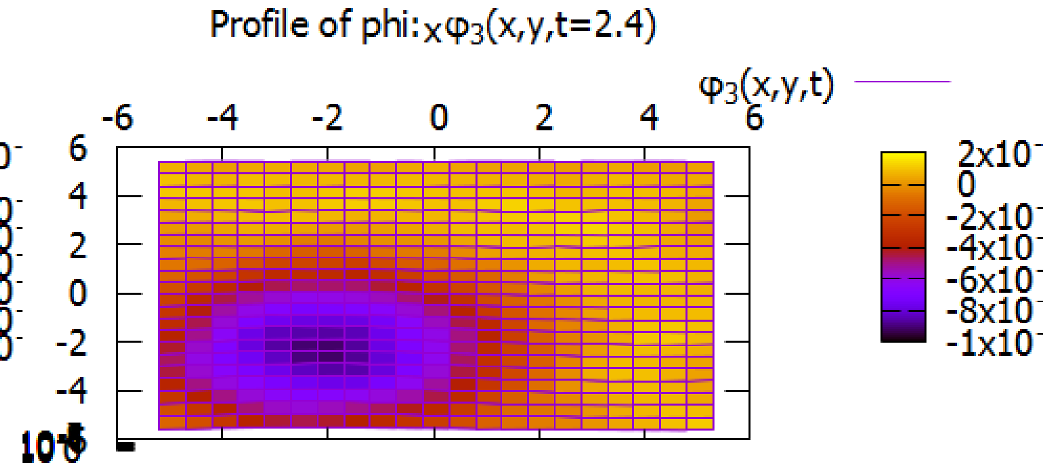

Profile of phi:$_x\varphi_3$(x,y,t=0.9)
φ_3(x,y,t)

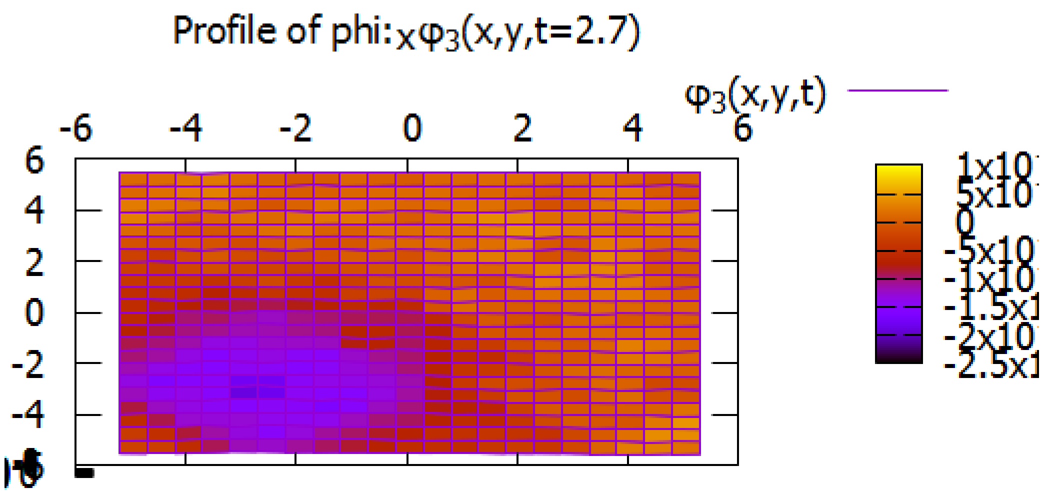

Profile of phi:$_x\varphi_3$(x,y,t=1.2)
φ_3(x,y,t)


Profile of phi:$_x\varphi_3$(x,y,t=1.5)
φ_3(x,y,t)


Profile of phi:$_x\varphi_3$(x,y,t=1.8)
φ_3(x,y,t)


Profile of phi:xφ3(x,y,t=2.1)
φ3(x,y,t)
-6 -4 -2 0 2 4 6
6 4 2 0 -2 -4
1x10
0
-1x10
-2x10
-3x10
-4x10
-5x10
-6x10


Profile of phi:xφ3(x,y,t=2.4)
φ3(x,y,t)
-6 -4 -2 0 2 4 6
6 4 2 0 -2 -4
2x10
0
-2x10
-4x10
-6x10
-8x10
-1x10


Profile of phi:xφ3(x,y,t=2.7)
φ3(x,y,t)
-6 -4 -2 0 2 4 6
6 4 2 0 -2 -4
1x10
5x10
0
-5x10
-1x10
-1.5x1
-2x10
-2.5x1